

2"ある。よせよ。

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

から P は正則、2"あるの2"

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Σ 1st 3。 = ねから

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

から得る。

$$\textcircled{\text{主}} \quad P: \text{正則} \Leftrightarrow \left((\vec{p}_1, \vec{p}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \det(P) \neq 0$$

に注意、あると、

$$\textcircled{1} \dots c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

Σ 示せば、 P から正則、2"ある = 0"示す。

$$\begin{array}{rcl} A \cdot \textcircled{1} & -2c_1 \vec{p}_1 + 3c_2 \vec{p}_2 & = \vec{0} \\ -) \textcircled{1} \times 3 & 3c_1 \vec{p}_1 + 3c_2 \vec{p}_2 & = \vec{0} \\ \hline & -5c_1 \vec{p}_1 & = \vec{0} \end{array}$$

2" $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ から得る。① に代入すると
 $c_2 \vec{p}_2 = \vec{0}$

Σ 得るから、 $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$ から $c_2 = 0$ Σ 1st 3。よ、 P は正則、2"ある。
 ねと 171 本集に示す定理から示す。

定理 $A: 2 \times 2$ 正則行列

$$|\lambda I_2 - A| = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

に示す $\alpha \neq \beta$ とある。

$$A \vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_1, \quad A \vec{v}_2 = \beta \vec{v}_2, \quad \vec{v}_i \neq \vec{0} \quad (i=1,2)$$

$$\Rightarrow P = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \text{ (正則) 2"ある。}$$

II 7-11-11に11-11の定数から

$$A^2 - A - 6I_2 = O_2$$

Σ 得る. 2から

$$\begin{cases} A(A+2I_2) = 3(A+2I_2) \\ A(A-3I_2) = (-2)(A-3I_2) \end{cases}$$

から従い

$$\begin{cases} A^n(A+2I_2) = 3^n(A+2I_2) \quad \text{---(2)} \\ A^n(A-3I_2) = (-2)^n(A-3I_2) \quad \text{---(3)} \end{cases}$$

とする。②-③から

$$5A^n = 3^n(A+2I_2) - (-2)^n(A-3I_2)$$

従って

$$A^n = \frac{3^n}{5}(A+2I_2) - \frac{(-2)^n}{5}(A-3I_2)$$

から示した。

(別解)

$$\lambda^n = g(\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + a\lambda + b$$

より

$$\begin{cases} (-2)^n = -2a + b \\ 3^n = 3a + b \end{cases}$$

$$\text{から } a = \frac{1}{5}(3^n - (-2)^n)$$

$$b = 2a + (-2)^n = \frac{1}{5}(2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-2)^n)$$

Σ 得る. 2から

$$A^n = aA + b$$

と示す。