$$\overset{A}{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & -9 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ⅰ i行とj行を交換.

Ⅱ $\lambda \neq 0$ i行をλ倍.

Ⅲ $(i \neq j)$ i行のλ倍をj行に加える.

$2r += 1r \times (1)$

$3r += 1r \times (-3)$

$4r += 1r \times (-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{cccc} x & y & z & w \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形

↑ 可逆な変形.

$1r += 2r \times (-2)$

pivot = 1

pivot 以外 0

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$0x + 0y + 0z + 0w = 0$

$$\begin{cases} x - 3y + w = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}$$

〇…与えられた方程式と同値.

$y = \alpha,\ z = \beta$ とおく.

$$\begin{cases} x = 3\alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ w = \beta. \end{cases}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} ; \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

与えられた方程式の解の全体.

$= \ker(A)$

A の核

(kernel.)

le noyau

$A\vec{v} = \vec{0}$ 斉次方程式

(homogeneous)

$A\vec{v} = \vec{c} \neq \vec{0}$

非斉次

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A\vec{v}_1 = \vec{0} \\ A\vec{v}_2 = 0 \end{array} \right\}$$

$$A(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2$$

$$= \lambda \vec{0} + \mu \vec{0} = \vec{0}$$

$$\rightsquigarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in V$$

V は $+$, $\cdot$ について閉じている.

$\quad\;\;\uparrow$ 定数倍

$\rightsquigarrow$ 線形空間.

復習

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^2 - (a+d)A + \overset{ad-bc}{\overset{\shortparallel}{\det(A)}}\, I_2 = O_2$$

ケーリー・ハミルトン.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 - 5C + 6I_2 = O_2$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$ Cの固有方程式

$$= |\lambda I_2 - C| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-3)$$

$\lambda = 2, 3$ 固有値. (eigenvalues of C)

$$\lambda^n = g(\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) + a\lambda + b$$

割り算.

商. quotient　　　余り. residue.

$$= g(\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3) + a\lambda + b.$$

$\lambda = 2$ を代入
$\lambda = 3$ ———

$$\left.\begin{aligned} 2^n &= 2a + b \\ 3^n &= 3a + b \end{aligned}\right\}$$

$$a = 3^n - 2^n, \quad b = 3^n - 3(3^n - 2^n)$$
$$= 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

$$\lambda^n = g(\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) + (3^n - 2^n)\lambda$$
$$+ (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)$$

$$\rightsquigarrow C^n = (3^n - 2^n)\, C + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n)\, I_2$$

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

$$f(C) = a_n C^n + a_{n-1} C^{n-1} + \cdots + a_1 C + a_0 I_2$$

<u>公式</u>　f_1, f_2 : 多項式.

$$(f_1 \cdot f_2)(C) = f_1(C) \cdot f_2(C)$$

多項式の積　　行列の積

$$(f_1 \pm f_2)(C) = f_1(C) \pm f_2(C)$$

$$C^n = g(C)\boxed{(C^2 - 5C + 6I_2)} \leftarrow O_2$$

$$+ aC + bI_2$$

$$= aC + bI_2$$

1311

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I_2 = O$$

$$(A - 2I)^2 = O_2$$

$(\lambda - 2)^2 = 0$ が固有多項式

$$x^n = g(\lambda)(\lambda-2)^2 + a\lambda + b$$

$\lambda = 2$ 를 대입

$$2^n = 2a + b \quad \cdots ①$$

$$n\lambda^{n-1} = g'(\lambda)(\lambda-2)^2 + g(\lambda)\cdot 2(\lambda-2) + a$$

$\lambda = 2$ 를 대입 [illegible]

$$n2^{n-1} = a.$$

$$\rightsquigarrow \quad a = n2^{n-1}$$

$$b = 2^n - 2\cdot a$$

$$= 2^n - n\cdot 2^n = 2^n(1-n)$$

$$\boxed{A^n = n2^{n-1}A + 2^n(1-n)I_2.}$$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

[illegible] $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ [illegible]

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n(a_1 - 2a_0) \to \cdots\cdots$$

$\cancel{2^{n+1}\ 2^n\ \cdots}$.

$$\cancel{\frac{1}{2^{n+1}}(a_{n+2} - 2a_n) = \frac{1}{2^n}(a_n}$$

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n(a_1 - 2a_0)$$

両辺を 2^{n+1} で割ると.

$$\frac{1}{2^{n+1}} a_{n+1} - \frac{1}{2^n} a_n = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)$$

$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_0)$$

階~~の~~と なるり

等差.

$$b_n = \frac{n}{2}(a_1 - 2a_0) + b_0$$

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{n}{2}(a_1 - 2a_0) + a_0$$

$$\boxed{a_n = 2^{n-1} \cdot n(a_1 - 2a_0) + a_0 \cdot 2^n}$$

I $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(1) $|\lambda I_2 - A| = 0$ をみたす λ を求める.

(2) (1) の λ に対して $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ をみたす $\vec{v}$ を求める.

$\left((\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$

(3) ある正則行列 P に対して

$$A = P \begin{pmatrix} *_1 & 0 \\ 0 & *_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

と書いて A^n を計算する.

$A(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$
$= (A\vec{p}_1, A\vec{p}_2)$
$= \cdots\cdots$

II $\quad$ I の A に対して ケーリー・ハミルトン を使って A^n を計算する.