

$$A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \dots \vec{a}_n)$$

$m \times n$ 行列.

$$\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

$$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$$

連立1次方程式

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

$\Leftrightarrow$

$$[A | \vec{b}]$$

$$(\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n | \vec{b})$$

行基本変形

= 左から基本行列 P をかける

P は正則

P^{-1}

P

$$PA \vec{x} = P \vec{b} \Leftrightarrow (PA | P \vec{b})$$

$$(P \vec{a}_1, P \vec{a}_2, \dots, P \vec{a}_n | P \vec{b})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_5)$$

$$I_m(A) = \{ A\vec{x}; \vec{x} \in \mathbb{R}^5 \}$$

$$\mathbb{R}^4 \searrow = \{ x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_5 \vec{a}_5; x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R} \}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$I_m(A) \ni \vec{b}$$



$$\vec{b} = A\vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^5$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right)$$

$$\downarrow$$

$$4r + 3s = 3 \times (-1) \downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 3 \end{array} \right)$$

$$\alpha \neq 3 \wedge \alpha \in \mathbb{R}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = \alpha - 3$$

$$= 0 \Leftrightarrow \exists \text{ 解なし}$$

$$\alpha = 0$$

$$\text{常に成立}$$

$$= 0$$

$$\alpha = 3 \text{ である}$$

x_4, x_5

3

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{r} 112231 \\ -) 010102 \\ \hline 10213-1 \\ -) 002242 \\ \hline 100-1-1-3 \end{array}$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

"

$$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5 | \vec{e})$$

$$x_4 = \alpha, x_5 = \beta$$

$$x_1 = \alpha + \beta - 3$$

$$x_2 = -\alpha + 2$$

$$x_3 = -\alpha - 2\beta + 1$$

$$x_4 = \alpha$$

$$x_5 = \beta$$

連立1次方程式

$$(A | \vec{e}) \text{ に関する } \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \text{rank}(A) = 3 \\ n = 5 \end{pmatrix}$$

$$x_1, \dots, x_5$$

$$\text{自由度} = 5 - 3 = 2$$

まとめ

$$\text{rank}(A | \vec{e})$$

$$= \text{rank}(A)$$

$$A: m \times n$$

$$x_1, \dots, x_n \text{ 変数}$$

$$\text{解の自由度} = n - \text{rank}(A)$$

$$\ker(A) \text{ の次元}$$

$\vec{x} \in \text{ker}(A)$ である

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ -\alpha \\ -\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \leftarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_1$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2$

例

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \vec{x} \in \text{ker}(A).$$

$\vec{x} \in \text{ker}(A)$ である $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ は基底であるか?

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{である} \quad \alpha = \beta = 0$$

0 以外の α, β は存在しない。
 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は基底である。

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \text{ker}(A)$ の基底

$\text{Im}(A)$ の基底

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_5) \rightarrow \dots \rightarrow B = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_5)$$

$$\begin{cases} \vec{b}_4 = (-1)\vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{b}_5 = (-1)\vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{a}_4 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 \\ \vec{a}_5 = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 \end{cases}$$

何と何?

2 $A \rightarrow \dots \rightarrow B$
 3行基本変形 $\rightarrow$ 正則行列 P が存在する

$$PA = B \quad P(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_5) = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_5)$$

"

$$(P\vec{a}_1 \dots P\vec{a}_5)$$

$$\leadsto P\vec{a}_j = \vec{e}_j \quad (j=1, \dots, 5)$$

$$\vec{a}_j = P^{-1}\vec{e}_j$$

$P \leftarrow$ 正則行列

"

$$\boxed{P_1 \dots P_5} A = B$$

P_i : 基本変形

n.b. P 正則

- 1) 3行基本変形 = 基本変形をたかすだけ
- 2) 基本変形は正則
- 3) 正則 $\times$ 正則 = 正則

$$\begin{aligned} \text{Im}(A) \ni \sum_{j=1}^5 x_j \vec{a}_j &= x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 \\ &\quad + x_4 (-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) \\ &\quad + x_5 (-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3) \\ &= (x_1 - x_4 - x_5) \vec{a}_1 \\ &\quad + (x_2 + x_4 + x_5) \vec{a}_2 \\ &\quad + (x_3 + x_4 + 2x_5) \vec{a}_3 \end{aligned}$$

$\therefore \text{Im}(A)$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ によって張られる

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は基底-ではないと仮定する。実際。

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + c_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

と仮定。Pをみたす

$$c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + c_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

より $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ と得る。

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は $\text{Im}(A)$ の基底と仮定する

例

- $\dim \text{Im}(A) = \text{rank}(A)$

I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -3 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{に對して}$$

$\text{Im}(A)$ と $\text{ker}(A)$ の基底を求めよ.

II.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{に對して}$$

$\lambda I_3 - A$ の正則行列 λ を求めよ.

$$\begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda+3 & -1 \\ \textcircled{1} & 0 & \lambda+4 \end{pmatrix}$$