12月20日 演習解答

I (1) $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&3&1\\5&8&4\end{pmatrix}$ が正則であるかを判定して逆行列を求めよ

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&2\\3&3&1\\5&8&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3&2\\0&-6&-5\\0&-7&-6\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-6&-5\\-7&-6\end{vmatrix}=36-35=1$$

$\begin{cases}2r\mathrel{+}=1r\times(-3)\\3r\mathrel{+}=1r\times(-5)\end{cases}$

より A は正則である.

$$(A\mid I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\3&3&1&0&1&0\\5&8&4&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&-6&-5&-3&1&0\\0&-7&-6&-5&0&1\end{array}\right)$$

$\downarrow$ $2r\times(-1)$, $3r\times(-1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&6&5&3&-1&0\\0&7&6&5&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow{2r\times\frac{1}{6}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&1&\frac{5}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\0&7&6&5&0&-1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&1&\frac{5}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\0&0&\frac{1}{6}&\frac{3}{2}&\frac{7}{6}&-1\end{array}\right)$$

$\downarrow$ $3r\times6$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&1&\frac{5}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\0&0&1&9&7&-6\end{array}\right)\xrightarrow{1r\mathrel{+}=2r\times(-3)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&\frac{5}{6}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}&0\\0&0&1&9&7&-6\end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&4&-3\\0&1&0&-7&-6&5\\0&0&1&9&7&-6\end{array}\right)$$

から $A^{-1}=\begin{pmatrix}4&4&-3\\-7&-6&5\\9&7&-6\end{pmatrix}$

注 この計算から 基本行列 $P_1, P_2, \cdots, P_\ell$ が存在し

$$P_\ell\cdots P_2P_1A=I_3$$

を得るが、$P = P_l \cdots P_1$ とおくと P は正則となり

$$PA = I_3$$

から

$$A = P^{-1}$$

を得るので、A は正則が分かる

$$\boxed{Q:\text{正則} \Rightarrow Q^{-1}:\text{正則}}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について (1)と同様。

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{2r += 1r \times \frac{1}{2} \\ 3r += 1r \times \frac{1}{2}}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

から A は正則である.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1r \times = \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3r += 1r \times (-1)]{2r += 1r \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2r \times = \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3r += 2r \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2r += 3r \times (-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1r += 2r \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$2r += 3r \times -\frac{1}{2}$

から $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix}$ に対して $Im(A)$ の次元を求める.

$A \xrightarrow[\substack{2r + = 1r \times (-1) \\ 3r + = 1r \times (-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \\ 0 & x-1 & x-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r \leftrightarrow 3r]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = A_1$

① $x = 1$ のとき

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり

$$\dim Im(A) = rank(A) = 1$$

を得る.

② $x \neq 1$ のとき.

$A_1 \xrightarrow[\substack{2r \times = \frac{1}{x-1} \\ 3r \times = \frac{1}{x-1}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

から $\dim Im(A) = rank(A) = 3.$