$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

A：正則行列

A：正則 $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\Longleftrightarrow (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

$\Longleftrightarrow A \to \cdots \to I_n$

行基本変形

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 3\ 3\ 1 \\ -)\ 3\ 9\ 6 \\ \hline 0\ {-6}\ {-5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ 8\ 4 \\ -)\ 5\ 15\ 10 \\ \hline 0\ {-7}\ {-6} \end{array}$$

$= 36 - 35 = 1 \neq 0$

$\rightsquigarrow A$：正則.

行基本変形

① $i \neq j$　i行とj行の交換.

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_3 \end{vmatrix}$$

P：基本行列　$|PA| = -|A|$

$\det(A) = 0$ （$\neq 0$）

$\Updownarrow$

$\det(PA) = 0$ （$\neq 0$）

② $i \neq j$　i行のλ倍をj行に$+$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \lambda a_1 + a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$$

P：基本行列　$|PA| = |P|$

③ i行を $\lambda(\neq 0)$倍.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{vmatrix}$$

P: 基本行列　$|PA| = \lambda |A|$

$\boxed{\text{まとめ}}$

P: 基本行列　$\det(PA) = \overset{\neq 0}{\cancel{\det}}\ 0$

$\iff \det(A) = 0$

$\neq 0.$

$A: 3\times 3$

$A \to \cdots\cdots \to\ ?$

rank 3

$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) \neq 0$

$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$　　$\det(\ ) = 1$

rank 2

$A \to \cdots \to$

① $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \det(\ ) = 0$

$\det(A) = 0$

② $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \det(\ ) = 0$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ の解.

① $\begin{cases} x = -\alpha t \\ y = -\beta t \\ z = t \end{cases}$　$\begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が解.

② $y = z = 0$　$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が解.

rank 3.　　$\det(A) \neq 0$　　正則.

$(A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

rank < 3

→ $\det(A) = 0$

正則じゃない

↑

ある $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対して $A\vec{x} = \vec{0}$

◎ A : 正則とする.

$$A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{= I_3}\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = 0$$

◎ A : 正則 $\Rightarrow (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

$A \rightarrow \cdots \rightarrow I_3$

行基本変形

$$\underbrace{\boxed{P_\ell \cdots P_1}}_{= P.} A = I_3.$$

P_j : 基本行列

正則

$PA = I_3$

P : 正則

$A = P^{-1}$ ⟶ A : 正則.

正則 × 正則 = 正則.

$(正則)^{-1} =$ 正則

rank 1

$$A \to \cdots \to \left\{ \begin{array}{l} ① \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ ② \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ ③ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \det(\ ) = 0$$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

① $x + \alpha y + \beta z = 0$

$$\begin{pmatrix} -s\alpha - t\beta \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ が解

② $y + \alpha z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ -\alpha t \\ t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$ が解.

③ $z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が解.

rank 0

$A = O_3$. $\quad \det(A) = 0$

$$O_3 \underset{\sim}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \vec{0}$$

$$(A\,|\,I_3) \to \cdots \to \left(\begin{array}{c|ccc} & 4 & -4 & -3 \\ I_3 & -7 & -6 & 5 \\ & 9 & 7 & -6 \end{array}\right)$$

⤳ A：正則.

II $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \end{pmatrix} \xrightarrow[3r \mathrel{+}= 1r\times(-1)]{2r \mathrel{+}= 1r\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \\ 0 & x-1 & x-1 \end{pmatrix}$

$$\Big\downarrow\ 2r \leftrightarrow 3r$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{x-1} & x-1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

$x=1$ のとき.

$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rank 1.

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rank}(A)}$$

A：一般に成り立つ.

$\dim \mathrm{Im}(A) = 1$ 基底 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x \neq 1$

$2r \times \dfrac{1}{x-1}$, $3r \times \dfrac{1}{x-1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rank}(A) = 3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x \end{pmatrix}$ が基底.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 3 & 4 \\ -) & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 0 & -1 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 3 & 4 & 5 \\ -) & 3 & 6 & 9 \\ \hline & 0 & -2 & -4 \end{array}$$

$$2\,(0 \ \ -1 \ \ -2)$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ -a & 1 & b \\ -c & -b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & a^2+1 & b+ac \\ 0 & ac-b & 1+c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} & -a & 1 & b \\ +) & a & a^2 & ac \\ \hline & 0 & a^2+1 & b+ac \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & -c & -b & 1 \\ +) & c & ac & c^2 \\ \hline & 0 & ac-b & 1+c^2 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+1 & ac+b \\ ac-b & c^2+1 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2+1)(c^2+1) - (a^2c^2 - b^2)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2a & 5 \\ a & 1 & 5 & 4a \end{pmatrix}$$

<u>Im(A) の求め方.</u>

$$\begin{array}{rcccc} & 3 & 5 & \boxed{2 \quad a} & 5 \\ -) & 3 & 6 & 3 & 3 \\ \hline & 0 & -1 & 2a-3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} & a & 1 & 5 & 4a \\ -) & a & 2a & a & a \\ \hline & 0 & 1-2a & 5-a & 3a \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2a-3 & 2 \\ 0 & 1-2a & 5-a & 3a \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-2a & -2 \\ 0 & 1-2a & 5-a & 3a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rccc} & (1-2a) & 5-a & 3a \\ -) & 1-2a & (3-2a) \times (1-2a) & -2(1-2a) \\ \hline & 0 & *_1 & *_2 \end{array}$$

$$*_1:\ (5-a)-(3-2a)(1-2a)$$
$$= -4a^2 + \underset{7a}{\cancel{\quad}} + 2.$$
$$= -(4a^2-7a-2)$$
$$= -(4a+1)(a-2)$$

$$\begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}$$

$$*_2:\ = 3a + 2(1-2a)$$
$$= -a+2.$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-2a & -2 \\ 0 & 0 & *_1 & *_2 \end{pmatrix}$$

$$*_1 = *_2 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$a = 2$$

鉄則:

A : 行列

$$\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rank}(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ である α を求める.

$A\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{= \vec{b}}$ である $\vec{x}$ がある.

$(A \mid \vec{b}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow$ 解があるかどうか.

$$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_5 \mid \vec{b}) \rightleftarrows (P\vec{a}_1 \cdots P\vec{a}_5 \mid P\vec{b})$$

$$x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_5 \vec{a}_5 = \vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 P\vec{a}_1 + \cdots + x_5 P\vec{a}_5 = P\vec{b}$$