

11月15日 行列と角解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Sigma \text{ 直交行列で対角化可能.}$$

まず固有値の方程式を計算しよう.

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 4 & \lambda-7 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 4 & \lambda-7 & 4 \\ 1 & -2 & -\frac{\lambda-1}{2} \end{vmatrix} \times (-2)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2(\lambda+1) & -2 + \frac{(\lambda-1)^2}{2} \\ 0 & \lambda+1 & 2\lambda+2 \\ 1 & -2 & -\frac{\lambda-1}{2} \end{vmatrix} \times (-2)$$

$$= \begin{vmatrix} 2(\lambda+1) & \frac{1}{2}(\lambda-3)(\lambda+1) \\ \lambda+1 & 2(\lambda+1) \end{vmatrix} \times (-2)$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2}(\lambda-3) \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \times (-2) (\lambda+1)^2$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ である. それぞれ固有ベクトルを求めよう.

$$\frac{V(-1)}{-I_2 - A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \times = (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2行目は1行目の4倍, 3行目は1行目の-2倍

$$\begin{matrix} 2r+ = 1r \times 4 \\ 3r+ = 1r \times (-2) \end{matrix} \downarrow (-4)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-1) \Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

 $\Sigma \frac{1}{2}$ のみ

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

intro

1. x, y, z の基底

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(11) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

2. x, y, z の基底を $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ とする

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

基底 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を求める。基底 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ とする

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定める

$$P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3)$$

1. P は直交行列と仮定する

$$AP = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

2.)

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & -1 & 11 \end{pmatrix} {}^t P$$

と対角化される。