

系2 主成分

11/8 1.5 主成分

intro

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ を直交行列で対角化する.}$$

Aの固有方程式は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2-1) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

と計算されるので A の固有値は $\lambda = -1, 1$ である。これら2つの固有空間を計算しよう。

$\lambda = -1$ のとき

$$-I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

か) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(-1) = \ker(-I_3 - A) \Leftrightarrow x+z=0$

す) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

と $V(-1)$ の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表される。

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2つの基底

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定める。

$\lambda = 1$ のとき $I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

す) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(1) \Leftrightarrow x=z, y=0$

す) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

と $V(1)$ の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される。

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と可なり $= a \pm \pi$

$$\begin{cases} \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = \|\vec{p}_3\| = 1 \\ (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

から成立するから

$$P = (\vec{p}_1 \vec{p}_2 \vec{p}_3)$$

は直交行列なりとなり

$$AP = P \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t P$$

と表示される。

何故直交行列なりを対角化出来るか？

$$(A\vec{v}, \vec{v})$$

と A から定まる $\vec{v}$ がある $\Rightarrow$ 固有形式と呼ぶ。 P から直交行列なりとあるとき $P^t P = I_3$ である。 実際

$$P^t P = P^t P = I_3$$

から

$$P^t (P^t P) = P^t (P^t P) = I_3$$

と ξ がある $\Rightarrow$ 固有形式 $\Rightarrow a \pm \pi$

$$(A\vec{v}, \vec{v}) = (P^t A P \vec{\xi}, P^t \vec{v})$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \right) = -\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2$$

と表示される。 $= a \pm \pi$

$$\vec{\xi} = P^t \vec{v}$$

と表示される。