

10月25日 分科解答.

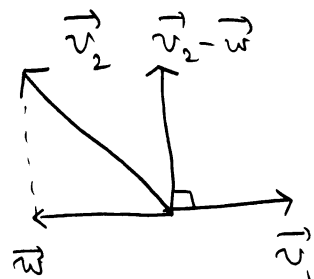
系2 第14 第15 第16 第17 第18 第19 第20 第21 第22 第23 第24 第25 第26 第27 第28 第29 第30 第31 第32 第33 第34 第35 第36 第37 第38 第39 第40 第41 第42 第43 第44 第45 第46 第47 第48 第49 第50 第51 第52 第53 第54 第55 第56 第57 第58 第59 第60 第61 第62 第63 第64 第65 第66 第67 第68 第69 第70 第71 第72 第73 第74 第75 第76 第77 第78 第79 第80 第81 第82 第83 第84 第85 第86 第87 第88 第89 第90 第91 第92 第93 第94 第95 第96 第97 第98 第99 第100

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; x + 3y - 2z = 0 \right\} \text{ の正規基底を求めよ.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \text{ とすると } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{と } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ を基底とすれば.}$$

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}_1\|} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



と置く. すると $\vec{v}_2$ と $\vec{p}_1$ の方向の正射影 $\vec{p}_1$ を求める.

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (\vec{p}_1, \vec{v}_2) \vec{p}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{6}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\vec{p}_1$ と垂直な $\vec{v}_2 - \vec{w}$ を基底とすれば

$$\vec{v}_2 - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と置く. $\vec{v}_2 - \vec{w}$ の単位ベクトルを

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

と置く.

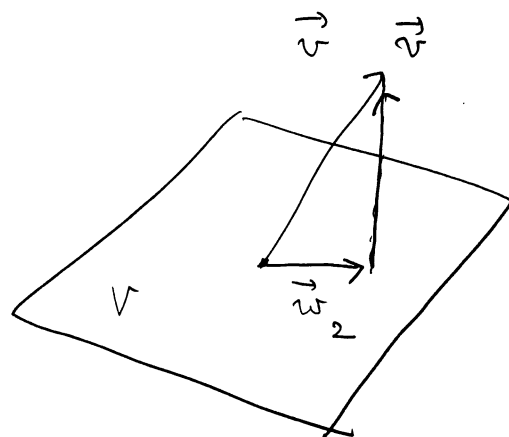
補足 $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ の V への正射影は $\vec{w}_2$ といふ

$$\vec{w}_2 \in V \text{ かつ } (\vec{v} - \vec{w}_2) \perp V$$

Σ 上の $T = \{ \vec{w}_2 \}$ である。問題はこれを求める

$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ を用いる

$$\vec{w}_2 = (\vec{p}_1, \vec{v}) \vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{v}) \vec{p}_2$$



とすると $\vec{w}_2 \in V$ であるから

$$\vec{w}_2 = x \vec{p}_1 + y \vec{p}_2$$

と書ける。 $\vec{p} \in V$ であるから

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{v} - \vec{w}_2, \vec{p}) = (\vec{v} - x \vec{p}_1 - y \vec{p}_2, \vec{p}) \\ &= (\vec{v}, \vec{p}) - x (\vec{p}_1, \vec{p}) - y (\vec{p}_2, \vec{p}) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\vec{p} = \vec{p}_1$ のとき $x = (\vec{p}_1, \vec{v})$ と $\vec{p} = \vec{p}_2$ のとき $y = (\vec{p}_2, \vec{v})$ と考えられる。

$$0 = (\vec{v}, \vec{p}_1) - x$$

$$0 = (\vec{v}, \vec{p}_2) - y$$

より

$$x = (\vec{p}_1, \vec{v}), \quad y = (\vec{p}_2, \vec{v})$$

が示される。 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{w}_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{35}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \times \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{3}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 63 \\ -21 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{70} \begin{pmatrix} 65 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と得られる。

$$\vec{v} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 13 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と置く. $\vec{v} - \vec{w}_2$ の単位ベクトルを

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と定める

$$\|\vec{p}_i\| = 1 \quad (i=1, 2, 3), \quad (\vec{p}_i, \vec{p}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が成る.

(注)

V の基底系を求めると

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

から $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2次元空間とわかる。これは Γ の法線と

一致していることに注意しよう。

