$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

対称行列

$${}^tA = A$$

$A = (a_{ij})$ とすると

$$a_{ij} = a_{ji}$$

固有方程式　$\overset{小}{\phi}$ $\overset{大}{\Phi}$

$$\Phi(\lambda) := |\lambda I_3 - A| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \lambda-3 & -2 \\ \lambda-3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & \lambda-3 & -2 \\ 0 & 1-(\lambda-3)^2 & 2+2(\lambda-3) \\ 0 & -2-2(\lambda-3) & \lambda-6+4 \end{vmatrix}$$

2行+= 1行×(−λ+3)

3行+= 1行×(−2)

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ b+\lambda a_1 \\ c \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & * & * \\ 0 & -\lambda^2+6\lambda-8 & 2\lambda-4 \\ 0 & 2\lambda-4 & \lambda-2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -(\lambda-2)(\lambda-4) & 2(\lambda-2) \\ -2(\lambda-2) & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

1列で展開

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

固有値 $\lambda = 2, 8$

重根.

$\lambda = 2$

$$2I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2$$

pivot $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow$ 1行 $\times (-1)$

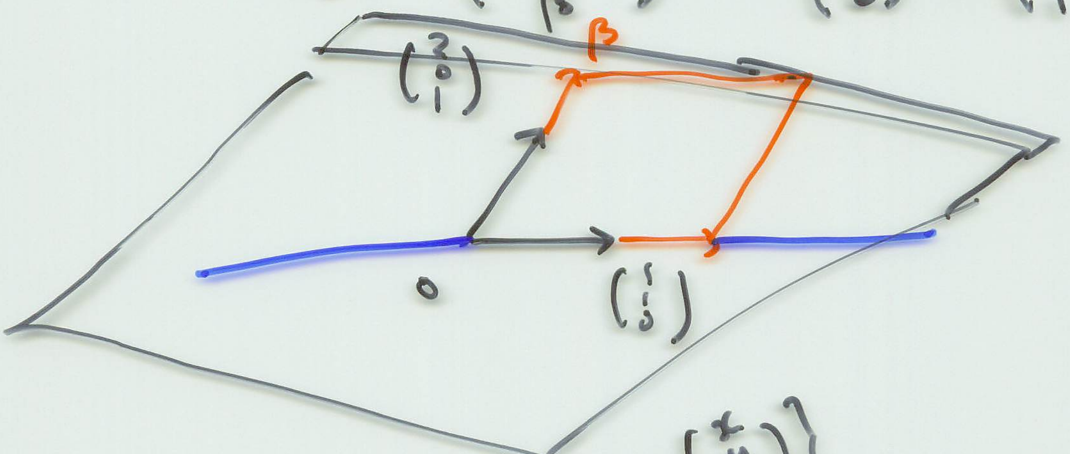
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff (2I_3 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\iff x - y - 2z = 0$

pivotのない変数 y, z を

$y = \alpha,\ z = \beta$ とおく

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$V(8) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$8I_3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -24 & 12 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 5 & 1 & 2 \\ -) & 5 & 25 & -10 \\ \hline & 0 & -24 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 2 & -2 & 2 \\ -) & 2 & 10 & -4 \\ \hline & 0 & -12 & 6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1r× = 2r×(−5)

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2} z = 0 \\ y - \frac{1}{2} z = 0 \end{cases}$$

$z = 2\alpha$ とおく.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$|\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}| \neq 0 \rightsquigarrow P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$ は正則.

$$\begin{aligned} AP &= A(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}) = (A\vec{p_1}\ A\vec{p_2}\ A\vec{p_3}) \\ &= (2\vec{p_1}\ \ 2\vec{p_2}\ \ 8\vec{p_3}) \\ &= (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}$$ 対角化可能

A : n次正方行列.

定理

$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 固有値.

$\vec{v}_i$: $A\vec{v}_i = \alpha_i \vec{v}_i \quad (i=1,2,\cdots,k)$

$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_k = \vec{0}$

$\Longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \cdots = \vec{v}_k = \vec{0}$

(kの帰納的に示す)　　2, 8 は Aの固有値.

どう使うか.　　$2 \neq 8$

$$(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) + c_3\vec{p}_3 = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} A(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) &= c_1 A\vec{p}_1 + c_2 A\vec{p}_2 \\ &= c_1 \cdot 2\vec{p}_1 + c_2 \cdot 2\vec{p}_2 \\ &= 2(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(c_3\vec{p}_3) &= c_3 A\vec{p}_3 \\ &= 8c_3\vec{p}_3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underbrace{c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2}_{\begin{pmatrix} * \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}} = \vec{0}, \quad c_3 \underset{\neq 0}{\vec{p}_3} = \vec{0} \longrightarrow c_3 = 0$$

$\longrightarrow c_1 = c_2 = 0.$

まとめ

$$\left((\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \longrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{0}}^{\text{自明解しかない}} \right)$$

$$\Longleftrightarrow (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3) - \text{正則} \Longleftrightarrow \det(P) \neq 0$$

$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$|\lambda I_2 - C| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-5)\lambda + 6$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-3)(\lambda-2)$

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{p_1}$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{o} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{p_2}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ は正則.

$c_1 \vec{p_1} + c_2 \vec{p_2} = \vec{o} \quad \longrightarrow \quad c_1 \vec{p_1} = \vec{o}, \; \vec{p_1} \neq \vec{o}$

$\quad \shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c_2 \vec{p_2} = \vec{o}, \; \vec{p_2} \neq \vec{o}.$

$(\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow c_1 = c_2 = 0$

A: 3次正方行列.

$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$

$\alpha \neq \beta, \; \beta \neq \gamma, \; \gamma \neq \alpha$

$\begin{cases} A\vec{v_1} = \alpha \vec{v_1} \\ A\vec{v_2} = \beta \vec{v_2} \\ A\vec{v_3} = \gamma \vec{v_3} \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \vec{v_1} \neq \vec{o} \\ \vec{v_2} \neq \vec{o} \\ \vec{v_3} \neq \vec{o} \end{matrix}\right) $ となる

$P = (\vec{v_1}\ \vec{v_2}\ \vec{v_3})$ は正則となる.

$$P\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_1\vec{v_1}+c_2\vec{v_2}+c_3\vec{v_3}=\vec{0}$$

$$\rightsquigarrow \quad c_1\vec{v_1}=c_2\vec{v_2}=c_3\vec{v_3}=\vec{0}$$

定理 $\quad \vec{v_1}\neq 0,\ \vec{v_2}\neq 0,\ \vec{v_3}\neq 0$

$$\rightsquigarrow \quad c_1=c_2=c_3=0$$

P : 正則.

$$AP = A(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3}) = (\alpha\vec{p_1}\ \beta\vec{p_2}\ \gamma\vec{p_3})$$

$$= (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \quad A = P\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}P^{-1}$ 対角化可能

<u>定理</u> A : 3次正方行列

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)$$

$$\alpha\neq\beta,\ \beta\neq\gamma,\ \gamma\neq\alpha$$

$\longrightarrow$ A は対角化可能

$+\alpha$

A : 実対称行列

A は対角化可能.

(P : 直交行列で対角化できる)

$$\underset{\cup}{V(2)} = \{ \quad x - y - 2z = 0 \} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

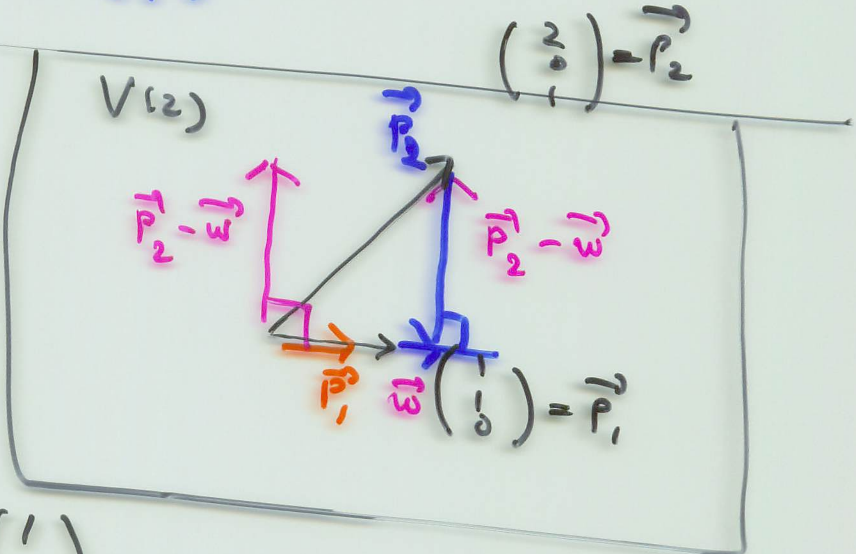
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in V(2)$

$$\left(\begin{array}{l} \|\vec{q}_1\| = \|\vec{q}_2\| = 1 \\ (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0 \end{array} \right.$$

を作る.



$$\vec{q}_1 = \frac{1}{\|\vec{p}_1\|} \vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V(2)$$

$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_2, \vec{p}_1)}{\|\vec{p}_1\|^2} \vec{p}_1 = \frac{2}{2} \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}_2$ の $\underset{\vec{q}_1}{\vec{p}_1}$ 方向への正射影

$$\boxed{(\vec{p}_2 - \vec{w}) \perp \vec{p}_1}$$

$$\vec{p}_2 - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(2)$$

大きさ1 $\vec{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(2)$

グラム・シュミットの直交化という.

慶應義塾大学答案用紙（日吉）

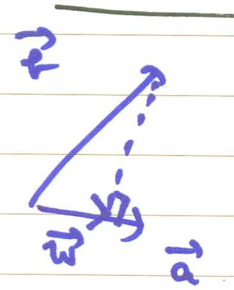
担当者名		学部　学科　年　組　番		採点欄	※
		学籍番号			
科目名		氏　名			

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \ x + 3y - 2z = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に注意。

V の $\vec{q}_1, \vec{q}_2$　$\left.\begin{array}{l} \|\vec{q}_1\| = \|\vec{q}_2\| = 1 \\ (\vec{q}_1, \vec{q}_2) = 0 \end{array}\right)$ を作る。



$\vec{t}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{t})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

$(\vec{t} - \vec{w}) \perp \vec{a}$