$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

${}^tA = A$ より A は対称行列

$$|\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix}\lambda&-1&1\\-1&\lambda&-1\\1&-1&\lambda\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&-1&\lambda\\-1&\lambda&-1\\\lambda&-1&1\end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix}1&-1&\lambda\\0&\lambda-1&\lambda-1\\0&\lambda-1&1-\lambda^2\end{vmatrix}$$

2行に1行を足す

3行に1行×(λ)を足す

$-\lambda$

$$\begin{array}{rccc} & \lambda & -1 & 1\\ -) & \lambda & -\lambda & \lambda^2\\ \hline & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda^2\end{array}$$

$$= -\begin{vmatrix}\boxed{\begin{matrix}\lambda-1\\\lambda-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\lambda-1\\1-\lambda^2\end{matrix}}\end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}1&1\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$(\lambda-1)\begin{pmatrix}1\\-1-\lambda\end{pmatrix}$

$(\lambda-1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$= -(\lambda-1)^2(-\lambda-2)$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ をみたす $\vec{v} \neq \vec{0}$ が存在 非自明解

$\iff |A-\lambda I_3| = 0 \iff \underbrace{\lambda = 1}_{\text{重根.}}$ or $\lambda = -2$

non-trivial solution.

$\lambda = 1$

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{1r\times(-1)\text{を} \\ 3r\text{に足す}}]{\substack{1r\times 1\text{を} \\ 2r\text{に足す}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivot

Ⅰ i行とj行の交換. $(i \neq j)$

Ⅱ $(\lambda \neq 0)$ i行をλ倍.

Ⅲ i行のλ倍をj行に加える.
$i \neq j$

row = 行.
column = 列.

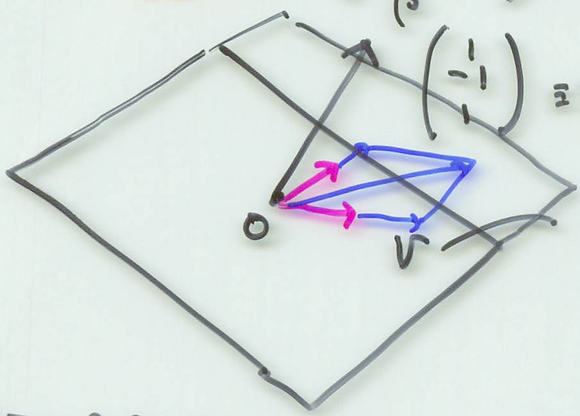
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$0x + 0y + 0z = 0$

$x - y + z = 0$

$y = \alpha,\ z = \beta$ とおく

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 法線方向

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ;\ x - y + z = 0 \right\}$$

$\lambda = -2$ のとき

$$-2I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \leftrightarrow 3r} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2r \mathrel{+}= 1r \times 1$
$3r \mathrel{+}= 1r \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r\times\left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \quad - z = 0 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$

$z = \alpha$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 正則とする $= (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3)$

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & -2 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-2) = 3 \neq 0$$

$$AQ = (A\vec{q}_1 \ \ A\vec{q}_2 \ \ A\vec{q}_3)$$
$$= (\vec{q}_1 \ \ \vec{q}_2 \ \ -2\vec{q}_3) = (\vec{q}_1 \ \vec{q}_2 \ \vec{q}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

但，下のに

$$(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \cdots \vec{v}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

$$AQ = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} Q^{-1}$ と対角化できる.

N.B. ① 重根があると対角化できないこと有り.

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc. ...

$(\lambda-1)^2$ $\qquad$ $(\lambda-1)^3$

② 1) 固有方程式が単純根のとき → 対角化可能

2) A: 対称行列のとき 対角化可能.

→ ナα 米・零.

公式 (転置の意味)

$A : m \times n$.

$$\begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n} \\ m\left\{ \boxed{\vec{a}_1 \ \cdots\cdots \ \vec{a}_n} \right. \end{array} \qquad \vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y})$$

$y \in \mathbb{R}^m$ 　 $\mathbb{R}^m$ の内積 　 $\mathbb{R}^n$ の内積.

${}^tA : n \times m$ 　 ${}^tA\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

V 　グラム・シュミットの直交化法

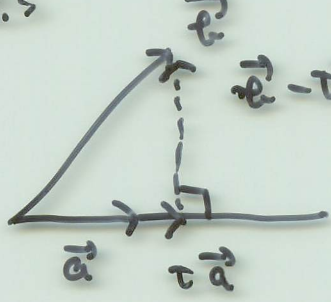
$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

V をはる $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ で

$(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$, $\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1$

となるものを求める. → 来週.

正射影



$\vec{b} - t\vec{a} \perp \vec{a}$

となるように t を求める

$$0 = (\vec{b} - t\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{b}, \vec{a}) - t(\vec{a}, \vec{a})$$

$$t = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}$$

$$\vec{v} = \frac{(\vec{b}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影 (直交射影)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ を対角化せよ.

(1) $|\lambda I_3 - A| = 0$ をみたす λ を求める.

(2) (1)のλに対し
$(\lambda I_3 - A)\vec{v} = \vec{0}$ をみたす $\vec{v}$ を求める.

(3) 対角化する.