I $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1-a \\ 1-a & a-1 \end{vmatrix} = -(1-a)\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1-a & a-1 \end{vmatrix}$

$= (a-1)^2 \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(a+2)$

9/27 第1講 解答

経済数学入門

II

$$\begin{vmatrix} 14 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 13 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ -12 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -12 & 2 \end{vmatrix} = -(-2+36)$$

$$= -34.$$

$$\begin{array}{rrrr} & 14 & 3 & 3 \\ -) & 15 & 0 & 3 \\ \hline & -1 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 13 & 2 & 5 \\ -) & 25 & 0 & 5 \\ \hline & -12 & 2 & 0 \end{array}$$

III

$$\begin{cases} 4x + 2y + 5z = 23 \\ x + 3y + z = 10 \\ 6x + y + z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrr} & 23 & 2 & 5 \\ -) & 50 & 15 & 5 \\ \hline & -27 & -13 & 0 \end{array}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 2 & 5 \\ 10 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1.$$

$$分子 = \begin{vmatrix} -27 & -13 & 0 \\ 10 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -27 & -13 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -(54 + 13) = -67$$

$$\begin{array}{rrrr} & 4 & 2 & 5 \\ -) & 5 & 15 & 5 \\ \hline & -1 & -13 & 0 \end{array}$$

$$分母 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -13 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & -13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -67$$

1行と2行を交換

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}a\\1-a^2\\1-a\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1-a\\a-1\end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{vmatrix}}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1-a^2 & 1-a \\ 1-a & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-a)\begin{vmatrix} 1+a & 1-a \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{rccc} & a & 1 & 1 \\ -) & a & a^2 & a \\ \hline & 0 & 1-a^2 & 1-a \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 1 & 1 & a \\ -) & 1 & a & 1 \\ \hline & 0 & 1-a & a-1 \end{array}$$

$$= (a-1)^2 \begin{vmatrix} a+1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)^2 (a+2)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \leftrightarrow a$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

単位行列.

$$|\lambda I_3 - A| = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = 0$$

Aの固有値は 1 と 2.

← 重根.

A : 3次正方行列.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

<u>定理</u> ← 後述.

$$\left(A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \right)$$

$\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ A には逆行列あり

系 $\det(A) = 0 \Longleftrightarrow$ ($A\vec{x} = \vec{0}$ かつ $\vec{x} \neq \vec{0}$ をみたす $\vec{x}$ あり)

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき. $I_3 \vec{x} = \vec{x}$

① $(-2I_3 - A)\vec{x} = 0$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ をみたす $\vec{x}$ あり

$-2\vec{x} - A\vec{x} = \vec{0}$

$A\vec{x} = -2\vec{x}$

$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$.

② $(I_3 - A)\vec{x} = 0$ かつ $\vec{x} \neq \vec{0}$ をみたす $\vec{x}$ あり

$A\vec{x} = \vec{x}$

①

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ +1 & -2 & +1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

② $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \Longleftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 & \cdots ① \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 & \cdots ② \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2行の交換}]{\text{1行と}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

↓ 2行に1行×2をたす。
3行に1行×(−1)をたす

$$\begin{array}{rrrr} & -2 & 1 & 1 \\ +) & 2 & -4 & 2 \\ \hline & 0 & -3 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & 1 & 1 & -2 \\ -) & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 0 & 3 & -3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

↓ 2行を $-\frac{1}{3}$ 倍

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

↓ 3行に2行×(−3)をたす

① pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↓ 1行に2行×2をたす

$$\begin{array}{rrrr} & 1 & -2 & 1 \\ +) & 0 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \boxed{0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0} \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ 常に成立

$x_3 = \alpha$ とおく。

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \qquad \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

が $\lambda = -2$ の固有ベクトル

pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1行目×(−1)を2行目にたす

1行目×(−1)を3行目にたす

$x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ とおく.

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\vec{v}_1 = -2\vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\vec{v}_2 = \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A\vec{v}_3 = \vec{v}_3$$

$P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$

正則とする.

$$AP = A(\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$$

$$= (A\vec{v}_1\ A\vec{v}_2\ A\vec{v}_3)$$

$$= (-2\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$$

$$= (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3$$

$3\times 3.$

$$AP = P\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

P^{-1}を左からかける.

$$P^{-1}AP = \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

まとめ $\rightsquigarrow$ Aは対角化可能

A: 3次正方行列

$(A\vec{x}=\vec{0} \Longrightarrow \vec{x}=\vec{0})$

$\Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow$ A:正則.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

243 page

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -12 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 36$$
$$= (\lambda-7)(\lambda+5)$$

$$\lambda = 7, -5$$

$\lambda = 7$

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x - 2y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff x + 2y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = (\vec{p_1} \ \vec{p_2})$$

$$AP = (A\vec{p_1} \ A\vec{p_2}) = (7\vec{p_1} \ -5\vec{p_1}) = (\vec{p_1} \vec{p_2}) \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
$$= P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$ 続は来週....

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ について

(1) $|\lambda I_3 - A| = 0$ をみたす λ を求めよ.

(2) (1) の λ について

$$(\lambda I_3 - A)\vec{x} = \vec{0}$$ を解け

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$