

L 11.0-1 7/27, 28, 29, 30
J. W. 72 No. 7.

$$f(x(t), y(t)) = F(t)$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(\text{---}) y'(t)$$

$$G(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

$$\boxed{G'(t) = f_x(\text{---}) x'(t) + f_y y'(t) + f_z z'(t)}$$

$$H(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

$\frac{\partial}{\partial s} \rightarrow$ treat s as independent variable.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial s} = f_x(\text{---}) \frac{\partial x}{\partial s} + f_y(\text{---}) \frac{\partial y}{\partial s} + f_z(\text{---}) \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} + f_z \frac{\partial z}{\partial t} \end{cases}$$

$$y'(x_1) = - \frac{g_x(x_1, y(x_1))}{g_y(x_1, y(x_1))}$$

$$g = x^2 y + y^3 - 10$$

$$= - \frac{2xy}{x^2 + 3y^2}$$

第4回 (7/5 a 2511)

2

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} \rightarrow = \varphi(x, y)$$

$$g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \in \mathbb{R}$$

後述

補足2

$$g(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0$$

∴ 両辺を偏微分すると

$$g_x \cdot 1 + g_y \cdot 0 + g_z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0$$

$$\begin{cases} g_x \cdot 0 + g_y \cdot 1 + g_z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0 \end{cases}$$

↑ 次回説明

71)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{g_x}{g_z} = - \frac{2x}{2z} = - \frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{g_y}{g_z} = - \frac{2y}{2z} = - \frac{y}{z}$$

$g(x)$

$$\text{II} \quad x^2 + x \cdot y - y^2 - 1 = 0 \quad \text{と見做して } y = \varphi(x) \text{ と}$$

得ると $\varphi'(x)$ を求めたい。

$$x^2 + x \varphi(x) - \varphi(x)^2 - 1 \equiv 0$$

∴ 両辺を x について微分すると

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$2x + \varphi(x) + x \varphi'(x) - 2\varphi(x) \varphi'(x) \equiv 0$$

⇔ 71)

$$\varphi'(x) = \frac{2x + \varphi(x)}{2\varphi(x) - x}$$

$$\varphi'(x)(x - 2\varphi(x)) = -2x - \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{du^2}{dx} &= \frac{du^2}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 2u \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

補足.

$$g(x, y) = x^2 + xy - y^2 - 1$$

とある

$$g(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

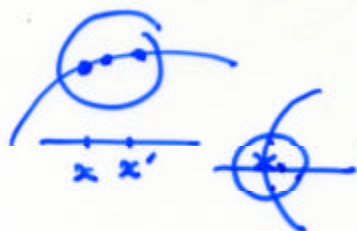
∴ 両辺を x について微分すると

$$g_x \cdot 1 + g_y \cdot \varphi'(x) \equiv 0$$

71)

↑ 次回説明.

$$\text{したがって } \varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$$



$$= - \frac{2x + \varphi(x)}{x - 2\varphi(x)}$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

陰関数定理により

$$f(x, y) = 0$$

点 (a, b) において $x = f(y)$ と表すことができる。 $f'(y) = 2y$

$$f_y(a, b) \neq 0$$

よって $f'(y) \neq 0$ である。 $f'(y) = 2y$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y &= \sqrt{1-x^2} \\ f_y &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f = x^2 + xy - y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{--- (1)}$$

$$\begin{cases} f_y = x - 2y = 0 \end{cases} \quad \text{--- (2)}$$

したがって $f_y(x, y) = 0$ となる点 (x, y) は $x = 2y$ である。

$$4y^2 + 2y^2 - y^2 = 1 \quad \frac{5}{2}y^2 = 1$$

したがって

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \quad x = 2y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって

$$(a, b) = \left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

例 5.17 (7/5a)

$$g = x^2 y + y^3 - 10 = 0 \text{ 上の点 } (1, 2) \text{ での } y = \varphi(x)$$

と置くとき、 g', g'' を計算

g の導関数は

$$g_x = 2xy, \quad g_y = x^2 + 3y^2$$

と計算されて

$$g_x(1, 2) = 4, \quad g_y(1, 2) = 13$$

を得ます。これから

$$4(x - 1) + 13(y - 2) = 0$$

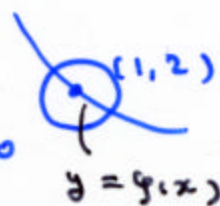
と接線の方程式が計算されます。

~~$$g = x^2 y + y^3 - 10 = 0$$~~

(別の計算法) 上の計算にあるように

$$g_y = x^2 + 3y^2$$

$$g_y(1, 2) = 1 + 3 = 4 \neq 0$$



となりますから、陰関数の定理を用いると、曲線 $g(x, y) = 0$ は $(1, 2)$ の周りで $y = \varphi(x)$ と解けます。このことから

$$x^2 y + y^3 - 10 = 0$$

$$(g^2)' = 2y\varphi' \quad x^2\varphi(x) + \varphi(x)^3 - 10 \equiv 0$$

← $x = 1, y = 2$ の点

が成立します。この両辺を x で微分すると

$$2x\varphi(x) + x^2 \cdot \varphi'(x) + 3\varphi(x)^2 \varphi'(x) = 0 \quad (5)$$

が成立します。これに $x = 1$ と $\varphi(1) = 2$ を代入すると

$$\varphi'(x^2 + 3y^2) = -2xy \leadsto \varphi' = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2}$$

$$2 \cdot 2 + 1^2 \varphi'(1) + 3 \cdot 2^2 \varphi'(1) = 0$$

$$2y + 2x\varphi' + 2x\varphi' + x^2\varphi'' + 6y(\varphi')^2 + 3y^2\varphi'' \equiv 0$$

から

$$\varphi'(1) = -\frac{4}{13}$$

を得ます。これから求める接線の方程式は

$$y = -\frac{4}{13}(x - 1) + 2$$

となります。

(補足) 上の計算において $\varphi''(1)$ を求めてみましょう。

(5)をさらに x で微分すると

$$2\varphi + 2x\varphi' + 2x\varphi' + x^2\varphi'' + 6\varphi(\varphi')^2 + 3\varphi^2\varphi'' = 0$$

すなわち

$$2\varphi + 4x\varphi' + 6\varphi(\varphi')^2 + (3\varphi^2 + x^2)\varphi'' = 0$$

を得ます。これから

$$\varphi''(x) = -\frac{2\varphi + 4x\varphi' + 6\varphi(\varphi')^2}{3\varphi^2 + x^2}$$

を得ます。これに $x = 1$ を代入します。

$$(x^2 + 3y^2) \varphi'' = -2y - 4x \varphi' - 6\varphi(\varphi')^2$$

$$\varphi'' = \frac{-2y - 4x \varphi' - 6\varphi(\varphi')^2}{x^2 + 3y^2}$$

$$g(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

x ist fest

$$g_x \cdot 1 + g_y \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$\leadsto \varphi' = -\frac{g_x}{g_y}$$

y ist fest x ist fest.

$$g_{xy} = (g_x)_y$$

$$(g_y)_x = g_{yx}$$

$$g_x(x, \varphi(x)) + g_y(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \equiv 0$$

$$g_{xx} \cdot 1 + g_{xy} \cdot \varphi' + g_{yx} \cdot \varphi' + g_{yy}(\varphi')^2 + g_{yy}(x, \varphi(x)) \varphi'' \equiv 0$$

$$\varphi'' = -\frac{1}{g_y} (g_{xx} + 2g_{xy} \varphi' + g_{yy}(\varphi')^2)$$

$g_{xy} = g_{yx}$

$$g_x = 2xy \quad g_{xx} = 2y$$

$$g_y = x^2 + 3y^2 \quad g_{xy} = 2x, \quad g_{yy} = 6y$$

$$= -\frac{2y + 4x \varphi' + 6\varphi(\varphi')^2}{x^2 + 3y^2}$$

- ist (211).

問題

$$g(x, y) = 0 \text{ 上の } \Gamma_2 \text{ (閉曲線)}$$

$$(x, y) \text{ 上で } 0 < \varepsilon$$

$$z = f(x, y)$$

は どのような?

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

かつ

$$z = f(x, y) = x + y$$



制約条件が与えられたとき.

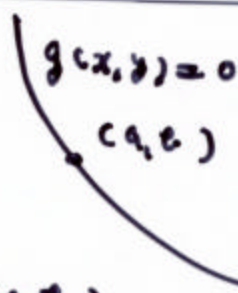
(1) (a, b) が 制約条件上にある.

$$2) g_x(a, b) \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(a, b) = \lambda g_x(a, b) \\ f_y(a, b) = \lambda g_y(a, b) \\ g(a, b) = 0 \end{cases}$$

ここで λ は 0 ではない.

(λ : Lagrange の乗数)



(例)

$$g = x^2 + y^2 - 1 = 0, z = f = x + y.$$

$$g_x = 2x, g_y = 2y$$

$$f_x = f_y = 1$$

$$\rightarrow x = y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\text{かつ } x = y$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$(x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(4 点)

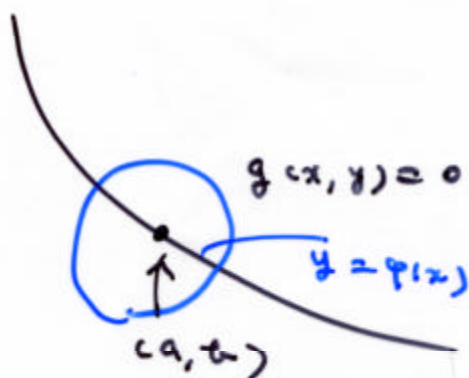


假定

- (a, b) 在 相切直线上

且

- $g_y(a, b) \neq 0$ 且



→ 隐函数定理. (a, b) 附近

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$$

$$F(t) = f(t, \varphi(t)) \in \mathbb{R} \text{ 且}$$

$$F'(a) = 0$$

$$F'(t) = f_x \cdot 1 + f_y \cdot \varphi' \rightarrow g(a) = b$$

$$t = a \text{ 且 } \Delta t \in \mathbb{R}$$

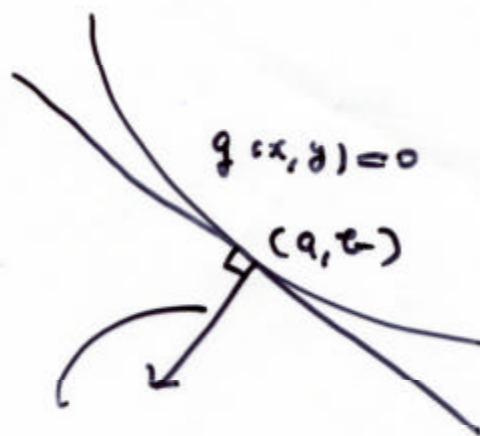
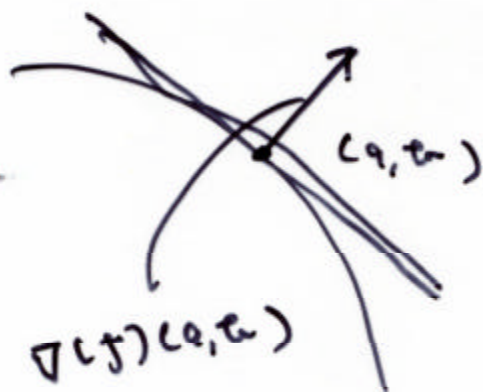
$$f_x(a, b) + f_y(a, b) \varphi'(a) = 0$$

$$\text{从而 } \varphi'(a) = - \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} \in \mathbb{R}.$$

$$f_x = + \frac{f_x}{f_y} \cdot f_y \rightarrow f_x = \lambda f_y$$

$$\lambda = \frac{f_y(a, b)}{f_y(a, b)} \in \mathbb{R} \rightarrow f_y = \lambda f_y$$

1/2 10月



$$f(x, y) - c = 0$$

$$\nabla(g)(a, b) \parallel \begin{pmatrix} g_x(a, b) \\ g_y(a, b) \end{pmatrix}$$

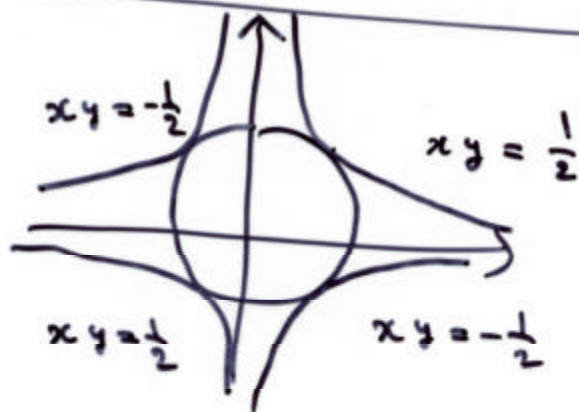
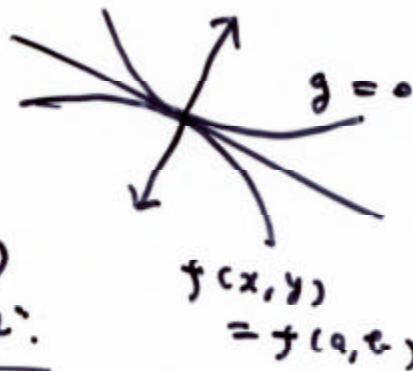
④ (f)

$$\nabla(f)(a, b) = \lambda \nabla(g)(a, b)$$

$$g(x, y) = 0 \text{ 且}$$

$$f(x, y) = f(a, b)$$

iff (a, b) is a local extremum of f on the set $g(x, y) = 0$.



(1311)

$$f = x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ かつ } z = f = xy$$

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y$$

$$f_x = y, \quad f_y = x \text{ かつ}$$

$$\begin{cases} y = 2\lambda x & \text{--- (1)} \\ x = 2\lambda y & \text{--- (2)} \\ x^2 + y^2 = 1 & \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$y = 4\lambda^2 x \rightarrow y = 0 \text{ かつ } x = 0$$

$$y \neq 0 \text{ かつ } x \neq 0$$

$$\textcircled{2} \text{ より } x = 0$$

$$4\lambda^2 = 1 \text{ かつ}$$

$$(0, 0) \text{ かつ } \textcircled{3} \text{ を満たす点はない}$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ かつ } \textcircled{3}$$

$$x = y \quad \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \text{ かつ } \textcircled{3}$$

$$x = -y \quad \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

1.5 21

$$f = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \text{ かつ}$$

$$z = f = xy$$

$$\text{--- } a \text{ かつ } b \text{ かつ } c$$

$$A = B\lambda \text{ --- (1)}$$

$$C = D\lambda \text{ --- (2)}$$

$$\textcircled{1} \times C - \textcircled{2} \times B \text{ かつ } z \text{ かつ } z$$