

6月28日

xとyは... 2変数.

I. $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ の $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ における接平面
 を求めよ (F).

$$z_x = \frac{1}{2} \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \frac{du^{\frac{1}{2}}}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$z_y = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

と偏導関数は計算される. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ における

$$z_x = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって 求める接平面は

$$z = -\frac{\sqrt{2}}{2} (x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} (y - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



単位球

補足: $z = g(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$x^2 + y^2 + g(x, y)^2 \equiv 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$\Sigma \equiv \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上の点 (x, y, z) における

$$\begin{cases} 2x + 0 + 2g \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \equiv 0 \\ 0 + 2y + 2g \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \equiv 0 \end{cases}$$

が成立する. よって

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{x}{g}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{g}$$

Review

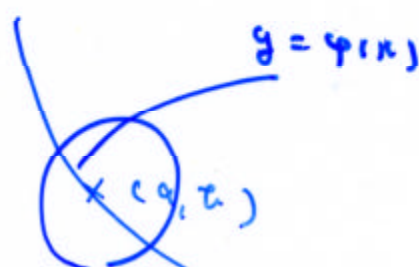
$$z = f(x, y) \text{ の } (a, b, f(a, b))$$

に近づく 7 8 9 10

$$z = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + f(a, b)$$

$$g(x, y) = 0 \text{ 上の点}$$

(a, b) に近づく 7 8 9 10



$$f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) = 0$$

0

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

$$y^2 - xy + (x^2 - 3) = 0$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 3)}}{2}$$

$$= \frac{x \pm \sqrt{3(4 - x^2)}}{2}$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$y = - \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} (x-a) + b$$

$$g'(a) = - \frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

验证

↑ 返回说明

$$g = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

验证 2°

$$g(x, y, g(x, y)) \equiv 0$$

∴ 两边对 x 偏微分可得

$$\begin{cases} g_x \cdot 1 + g_y \cdot 0 + g_z \cdot \frac{\partial g}{\partial z} \equiv 0 \\ g_x \cdot 0 + g_y \cdot 1 + g_z \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \equiv 0 \end{cases}$$

1°)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{g_y}{g_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

II $x^2 + x \cdot y - y^2 - 1 = 0$ 且解出 $y = g(x)$ 且得 $g'(x)$ 求如下：

$$x^2 + x \cdot g(x) - g(x)^2 - 1 \equiv 0$$

∴ 两边对 x 偏微分可得

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$2x + g(x) + x g'(x) - 2g(x) g'(x) \equiv 0$$

⇒ 1°)

$$g'(x) = \frac{2x + g(x)}{2g(x) - x}$$

$$g'(x)(x - 2g(x)) = -2x - g(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{du^2}{dx} &= \frac{du^2}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 2u \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

验证

$$g(x, y) = x^2 + xy - y^2 - 1$$

验证 1°

$$g(x, g(x)) \equiv 0$$

∴ 两边对 x 偏微分可得

$$g_x \cdot 1 + g_y \cdot g'(x) \equiv 0$$

1°)

↑ 返回说明

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \quad (1, 2)$$

に交点を持つ点がある。

$$f_x = 2x - y, \quad f_y = -x + 2y$$

となり (1, 2) における偏微分係数は

$$f_x = 0, \quad f_y = 3$$

と計算されます。これから、求める接線の方程式は

$$0 \cdot (x - 1) + 3(y - 2) = 0 \quad \text{すなわち } y = 2$$

となります。

(補足) 一般に曲線

$$g(x, y) = 0$$

上の点 (a, b) の近くで

$$y = \varphi(x)$$

と解ける十分条件として

$$g_y(a, b) \neq 0$$

があります (陰関数定理)。

上の例で、この陰関数定理が使えない点を求めましょう。そのためには

$$f_y = -x + 2y = 0, \quad f = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

を満たす (x, y) を求めます。x = 2y を x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 に代入すると

$$4y^2 - 2y^2 + y^2 - 3 = 0 \quad \text{すなわち } y^2 = 1$$

から y = ±1 を得ます。これから

$$(x, y) = (2, 1), (-2, -1)$$

が求める点となります。

この2点を除いて、曲線上の任意の点 (a, b) の近くで

$$y = \varphi(x)$$

$$\varphi'(x) = ?$$

と解けることが分かります。この関数 φ(x) が x = a で極値をとる場合を求めてみましょう。そのためには

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0, \quad \varphi'(x) = 0$$

を満たす (x, y) を求めることになります。

$$y = 2x$$

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} = -\frac{2x - y}{-x + 2y} = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \quad (3)$$

に注意しましょう。すると y = 2x を x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 に代入すると

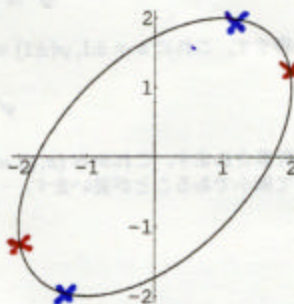
$$x^2 - 2y^2 + 4x^2 = 3 \quad \text{すなわち } x^2 = 1 \quad x = \pm 1$$

から x = ±1 を得ます。従って (a, b) = (1, 2), (-1, -2) の2点が停留点となることが分かります。

別の方法として

$$x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 = 0$$

$$= 0 \quad \text{と } x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 = 0 \quad \text{--- (2項に注目)}$$



さらに $\varphi''(\pm 1)$ を求めましょう。後に、別の方法を教えますが、ここでは簡単な方法を教えます。 $(x, \varphi(x))$ が曲線上にありますから、

$$x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 = 0$$

が成立します。この両辺を x で微分すると

$$2x - \varphi - x\varphi' + 2\varphi\varphi' = 0 \quad (4)$$

が常に成立します。これからも(3)と同じことを意味する

$$\varphi'(x) = -\frac{2x - \varphi(x)}{-x + 2\varphi(x)} \quad 12$$

を得ることに注意しましょう。さらに(4)を x で微分すると

$$2 - \varphi' - \varphi' - x\varphi'' + 2(\varphi')^2 + 2\varphi\varphi'' = 0$$

から

$$\varphi'' = \frac{2 - 2\varphi' + 2(\varphi')^2}{x - 2\varphi}$$

を得ます。これに $x = \pm 1, \varphi(\pm 1) = \pm 2, \varphi'(\pm 1) = 0$ を代入すると

$$\varphi''(\pm 1) = \mp \frac{2}{3}$$

と計算されます。これから $(x, y) = (1, 2)$ において極大、 $(x, y) = (-1, -2)$ において極小であることが従います。

$$\begin{aligned} & 2 - 2\varphi' + 2(\varphi')^2 \\ & = (x - 2\varphi)\varphi'' \end{aligned}$$

$$z = f(x, y)$$

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

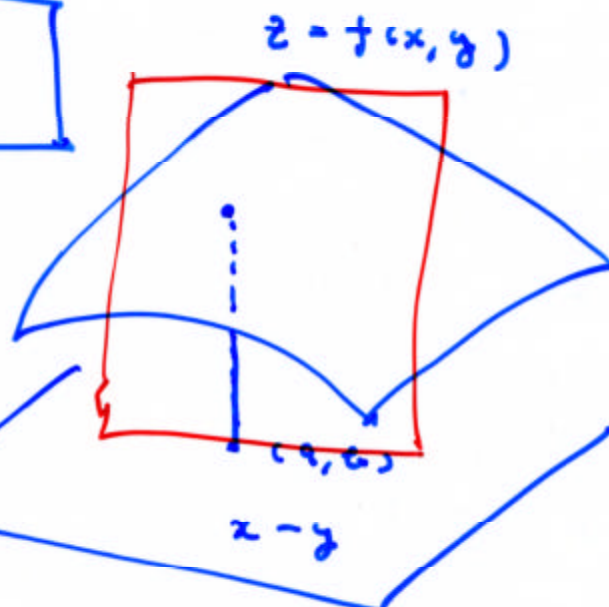
$$F'(t) = ?$$

$$x(0) = a, y(0) = b$$



$$\frac{F(t) - F(0)}{t - 0} \rightarrow ?$$

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$



$$f(x, y) \approx f(x(t), y(t)) = f(a, b)$$

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - F(0)}{t} &= \frac{1}{t} \{ f_x(a, b)(x(t) - x(0)) + f_y(a, b)(y(t) - y(0)) + f(a, b) - f(a, b) \} \\ &= f_x(a, b) \frac{x(t) - x(0)}{t} + f_y(a, b) \frac{y(t) - y(0)}{t} \\ &\quad \rightarrow x'(0) \quad \rightarrow y'(0) \end{aligned}$$

$$F'(0) = f_x(a, b)x'(0) + f_y(a, b)y'(0)$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t).$$

公式を便用 $G(x)$

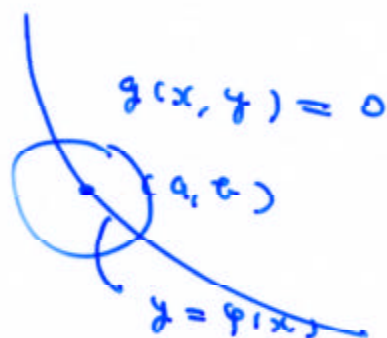
$$g(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

両辺を x に微分.

$$g'_x(x, \varphi(x)) \cdot 1 + g'_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

$$g_y \neq 0 \wedge \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = - \frac{g_x(x, \varphi(x))}{g_y(x, \varphi(x))}$$



1. 例 $g(x, y) = x^2 y + y^3 - 10 = 0$

2. $\varphi = \varphi(x)$ を求める.

① $\varphi'(x)$

② $(1, 2)$ は $x=1$ での解.

③ $\varphi''(1) = ?$