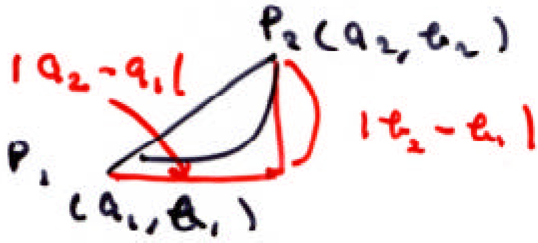
点列の収束

2点間の距離 (distance)

$P_1(a_1, b_1)$, $P_2(a_2, b_2)$

$$\underline{\underline{d}}(P_1, P_2) = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$



$$P_n(a_n, b_n) \longrightarrow P_0(a_0, b_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad d(P_n, P_0) \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

定義

$$\boxed{\left\{\begin{matrix}|a_n-a_0| \\ |b_n-b_0|\end{matrix}\right\} \leqq d(P_n, P_0) \leqq |a_n-a_0|+|b_n-b_0|}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_n \to a_0,\ b_n \to b_0 \quad (n \to +\infty)$$

開集合

開円盤 (open disk) $\delta > 0$

$$B_\delta(P) = \{(x,y);\ (x-a)^2+(y-b)^2 < \delta^2\}$$

$P = (a, b)$

半径 δ radius

中心 (P) center

開円盤

(I) $a_n \to a_0$, $b_n \to b_0$ とする

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0} \le \underset{\downarrow\atop 0}{d(P_n, P_0)} \le \underbrace{\underset{0}{\overset{\uparrow}{|a_n - a_0|}} + \underset{0}{\overset{\uparrow}{|b_n - b_0|}}}_{\downarrow\atop 0}$$

by はさみうち

$\rightsquigarrow P_n \to P_0$ $(n \to +\infty)$

(はさみうち)

$a_n \le b_n \le c_n$

$a_n \to \alpha$, $c_n \to \alpha$ $(n \to +\infty)$

$\Longrightarrow b_n \to \alpha$

(II) $P_n \to P_0$ とする.

$$\underset{\downarrow\atop 0}{0} \le \underset{\downarrow\atop 0}{\left\{ \begin{matrix} |a_n - a_0| \\ |b_n - b_0| \end{matrix} \right\}} \le \underset{\downarrow\atop 0}{d(P_n, P_0)}$$

by はさみうち

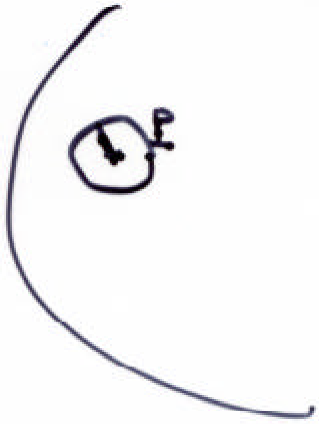
$\rightsquigarrow$ $a_n \to a_0$, $b_n \to b_0$ $(n \to +\infty)$

開集合 各点の周りが入っている。

U : 開集合. ($\mathbb{R}^2$ 中)

$\Longleftrightarrow$ 任意の $P \in U$ をとると
ある $\delta > 0$ をとると

$$B_\delta(P) \subset U$$

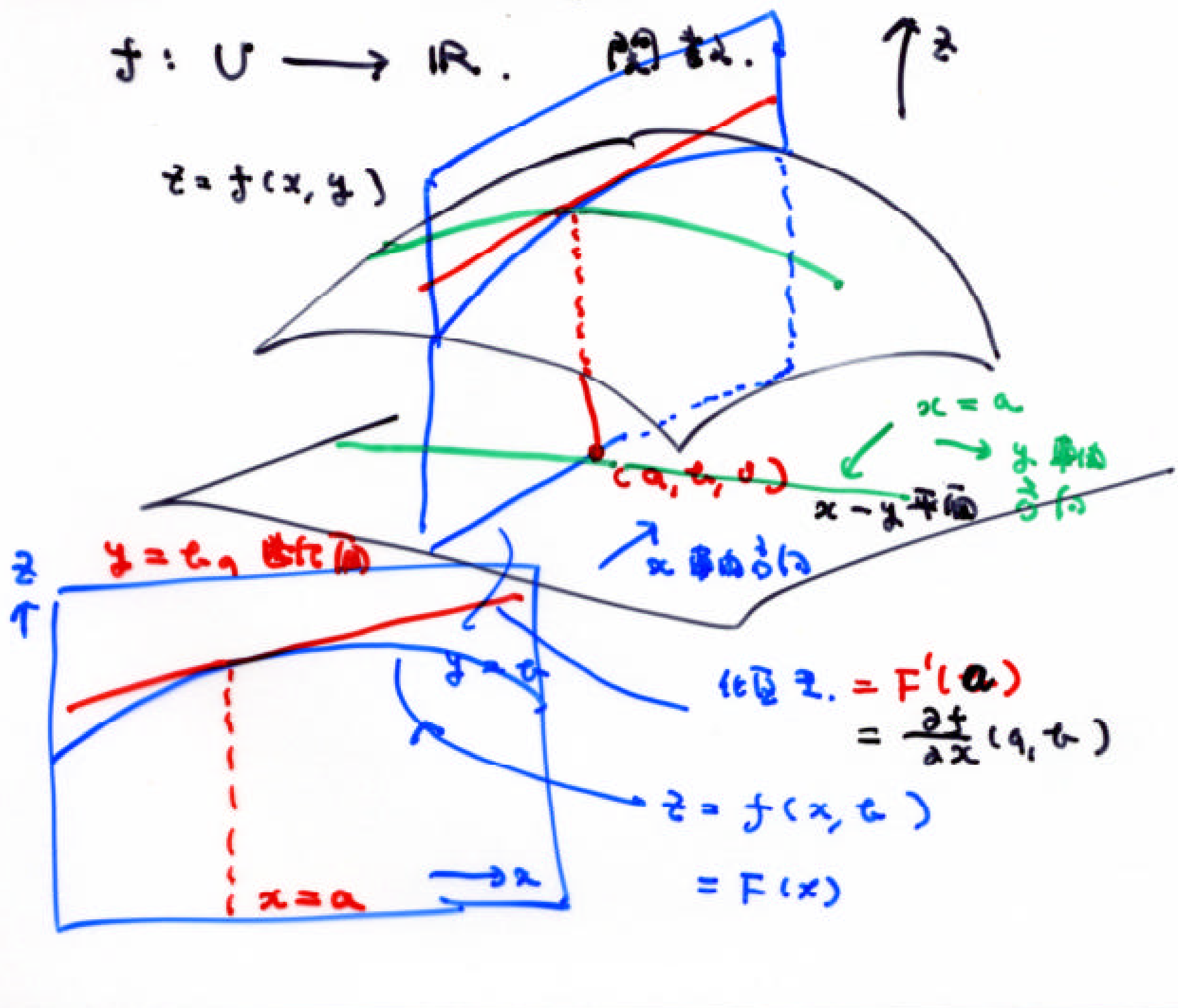


例 $Z = \{(x, y) ; y \geqq 0\}$

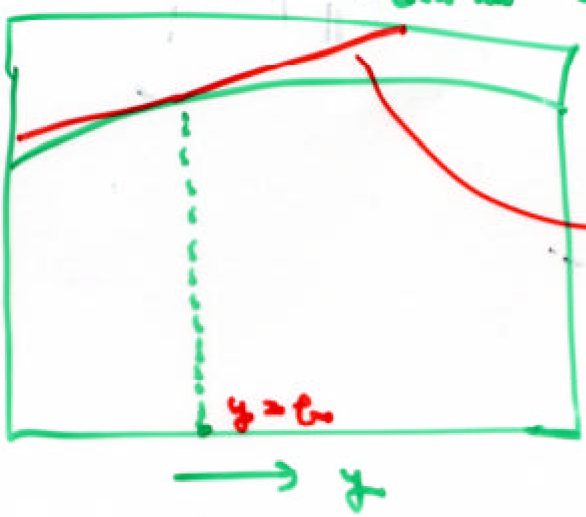
開集合でない

偏微分 U : $\mathbb{R}^2$ の開集合.

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. 関数.



$x = a$ の断面 cross-section



傾き $z = G'(b_0)$
$= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b_0)$

$G(y) = f(a, y)$

f の y に関する
偏微分係数

---

(434) 120ページ-3

$$u(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{(\sqrt{t})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

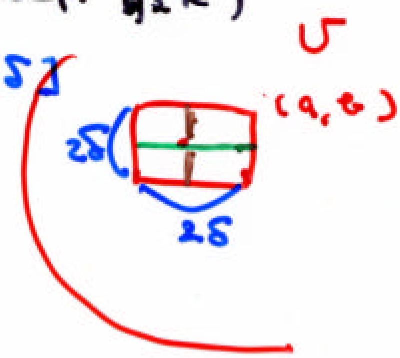
2変数の極大・極小. respectively.
resp.

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a, b) \in U$ で極小. (極大)

$\Leftrightarrow$ (a, b) の近くで最小 (resp. 最大)

ある $\delta > 0$ に対して
$[a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$
で 最小 (resp. 最大)



$G(y) = f(a, y)$
$F(x) = f(x, b)$ とおく.

$\to$ $G(y)$ $y = b$ で極小(極大)
$F(x)$ $x = a$ で極小. (極大)

$\rightsquigarrow$ $G'(b) = 0$, $F'(a) = 0$ $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0}$

1変数の復習

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$

$\quad\; \in$
$\quad\; c$

f が $x = c$ で極小 (極大)

$\Longrightarrow \quad f'(c) = 0$

逆は真ならず

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0$
$\iff x = 0$

1) $f'(c) = 0,\ f''(c) > 0$
(< 0)

2)

$\Longrightarrow f(c)$ は極小
(大)

証.

定理 $z = f(x, y)$ が (a, b) で極値をとる

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

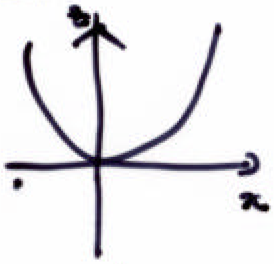
停留点 (stationary point)

$z = x^2 - y^2$

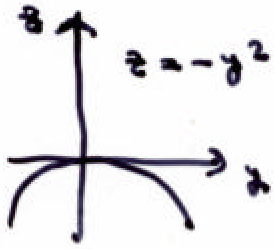
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y$

$x = y = 0$ が停留点

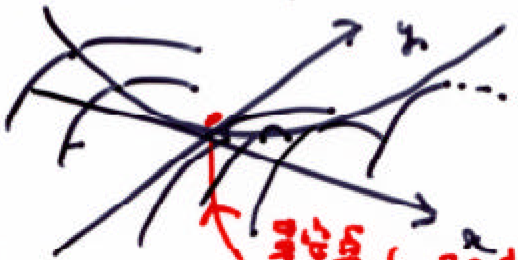
<u>$y = 0$</u> $\quad z = x^2$



<u>$x = 0$</u>



くら
鞍



鞍点 (saddle point)

point de <u>col</u>

<u>小テスト</u>

$$z = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$$

の停留点を求める.

$\dfrac{d}{dt}\{u(t)^2\} = 2u(t) \cdot u'(t) \qquad v = u(t)$

$\dfrac{d}{dt}u^2 = \dfrac{du^2}{du} \cdot \dfrac{du}{dt} = 2u\dfrac{du}{dt}$