04年11月15日 経書2I

回帰分析 ← 計量経済学の大事なツール.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow {}^tA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

1列 → 1行.

3行 → 3列.

0° $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\vec{x}\,\vec{y} = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1 \cdots y_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

1° ${}^t({}^tA) = A$.

2° $A : m \times \underset{\sim}{n} \quad B : \underset{\sim}{n} \times l \rightsquigarrow AB : m \times l$

$$AB = A\Big(\underbrace{\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_l}_{l列}\Big)\Big\}\,n行. = \Big(\underbrace{A\vec{b}_1 \cdots A\vec{b}_l}_{l列}\Big)\Big\}\,m$$

$\vec{b}_j \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n a_n}$$

$\Cap$ $\mathbb{R}^m$

$$\Big(\underbrace{\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n}_{n列}\Big)\Big\}\,m$$

$A : m \times n \quad B : n \times l \rightsquigarrow AB \ \ m \times l \rightsquigarrow {}^t(AB) \ \ l \times m$

$\rightsquigarrow {}^tB \ \ l \times \textcircled{n}, \ {}^tA \ \ \textcircled{n} \times m \rightsquigarrow {}^tB\,{}^tA \ \ l \times m$

公式 $\quad {}^tB\,{}^tA = {}^t(AB)$

(証明)

$$A = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_m \end{pmatrix} i \ , \quad B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_l) \ \ j$$

AB の i行j列 $= a'_i \vec{b}_j$

${}^t(AB)$ の j行i列 $= \boxed{a'_i \vec{b}_j}$

$${}^tB\,{}^tA = \begin{pmatrix} \boxed{{}^t\vec{b}_1} \\ {}^t\vec{b}_2 \\ \vdots \\ {}^t\vec{b}_l \end{pmatrix} j \ ({}^ta'_1 \ {}^ta'_2 \cdots {}^ta'_m) \ i$$

$\rightarrow$ j行i列 $= {}^t\vec{b}_j \, {}^t\vec{a'}_i = \boxed{a'_i \vec{b}_j}$

$C = (c_{ij})$

${}^tC = (c_{ji})$

転置 ^tA.

$A : m \times n \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left\{ \overbrace{(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)}^{n\text{列}} \right. \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

m行

$$= \boxed{x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n} \in \mathbb{R}^m$$

$\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$

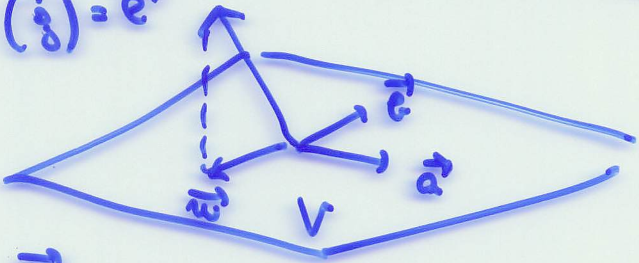
公式 $\quad (A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, {}^tA\vec{y})$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{y} \in \mathbb{R}^{\textcircled{m}} \\ {}^tA : n \times \textcircled{m} \end{array}\right\} \longrightarrow {}^tA\vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V = \{ s\vec{a} + t\vec{b} \,;\, s, t \in \mathbb{R} \}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{w} \in V \\ (\vec{e} - \vec{w}) \perp V \end{array}\right\}$$

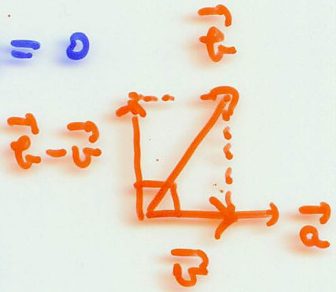


となる $\vec{w}$ ($\vec{e}$ の V への正射影)

$\vec{p}_1, \vec{p}_2$: V の正規直交基底.

$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1 \,,\, (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$

$$\boxed{\vec{w} = (\vec{p}_1, \vec{e})\,\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{e})\,\vec{p}_2}$$



$V = \{ s\vec{a} + t\vec{b},\ s,t \in \mathbb{R} \}$ $\quad A = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \vec{e} - \vec{w} \perp V \\ \vec{w} \in V \end{cases} \qquad \vec{e} - \vec{w} \perp V \Longleftrightarrow (\vec{e} - \vec{w}, \vec{v}) = 0$$

(全ての $\vec{v} \in V$)

$\vec{w} = s\vec{a} + t\vec{b}$
$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$
$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\left(\vec{e} - A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = 0$$

(全ての $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$)

$$\|$$

$$\left({}^tA\vec{e} - {}^tAA\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$$

任意の2次元ベクトル

$$\boxed{(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \ (\text{全ての } \vec{y} \in \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}}$$

${}^tAA\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = {}^tA\vec{e}$ 正規方程式.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det({}^tAA) = 10 - 1 = 9 \neq 0$$

${}^tAA$: 正則.

$$\boxed{\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\vec{e}}$$

$\vec{w} = s\vec{a} + t\vec{b}$ が正射影.

$$A = (\vec{a}\ \vec{b})$$

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\vec{a} \\ {}^t\vec{b} \end{pmatrix} (\vec{a}\ \vec{b})$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t\vec{a}\,\vec{a} & {}^t\vec{a}\,\vec{b} \\ {}^t\vec{b}\,\vec{a} & {}^t\vec{b}\,\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\|^2 & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & \|\vec{b}\|^2 \end{pmatrix}$$

Aの定めるグラム行列

---

z	y	x
z_1	y_1	x_1
z_2	y_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_n	y_n	x_n

モデル

$$z = ax + by + c$$

目的変数　　説明変数

z_i : 実測値

$ax_i + by_i + c$: 理論値

$\delta_i := z_i - ax_i - by_i - c$ 誤差

$\bar{\delta} = 0$, $V(\delta)$ ：最小

$$= \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y} - c$$

$$\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y} + \enclose{circle}{c}$$

$$V(\delta) = \frac{1}{N}\sum(\delta_i - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\bar{\delta}})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{(z_i - \bar{z}) - a(x_i - \bar{x}) - b(y_i - \bar{y})\right\}^2$$

$$= \|\vec{z} - a\vec{x} - b\vec{y}\|^2$$

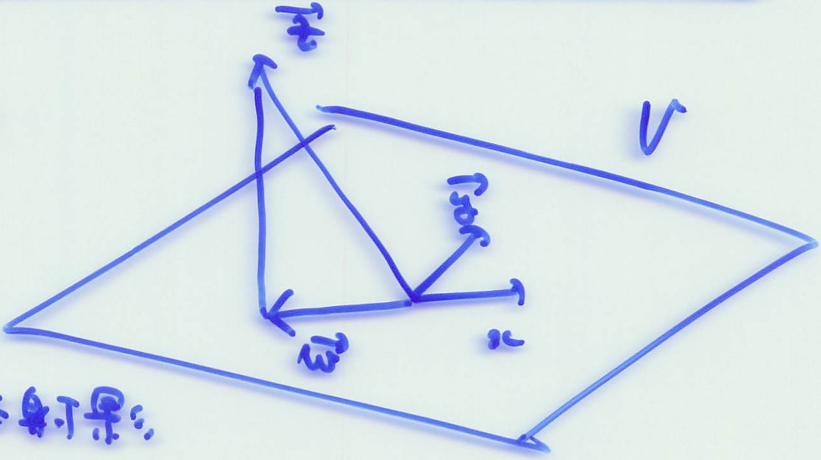
$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_n - \bar{y} \end{pmatrix}, \vec{z} = \cdots$$

$\|\vec{z} - a\vec{x} - b\vec{y}\|$

が最小。

$\vec{w} = a\vec{x} + b\vec{y}$ が

$\vec{z}$ の V への正射影。



$A = (\vec{x}\ \vec{y})$

$\left(\vec{z} - A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) = 0$ 全ての $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\|$

$\left({}^tA\vec{z} - {}^tAA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$

${}^tAA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = {}^tA\vec{z}$ 正規方程式

$$\boxed{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ({}^tAA)^{-1}\, {}^tA\vec{z}.}$$

合併と行うし

$${}^tAA = \begin{pmatrix} \|\vec{x}\|^2 & (\vec{x}, \vec{y}) \\ (\vec{y}, \vec{x}) & \|\vec{y}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(x) & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & V(y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t\vec{x} \\ {}^t\vec{y} \end{pmatrix}(\vec{x}\ \vec{y}) = \begin{pmatrix} {}^t\vec{x}\vec{x} & {}^t\vec{x}\vec{y} \\ {}^t\vec{y}\vec{x} & {}^t\vec{y}\vec{y} \end{pmatrix}$$

二次形 直交行列.

対称行列の直交行列による対角化.

2次形式 → 極値問題の判定

微分方程式.

I $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ とする.

$V = \{ s\vec{a} + t\vec{b} ; s, t \in \mathbb{R} \}$

$\vec{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ の V への正射影と 正規方程式

逆計算

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

$(D = ad - bc \neq 0)$