

11/10 1. テスト前まで

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{1. } \vec{v} \in \text{Im}(A) \text{ の基底を } \Sigma \text{ に求める.}$$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r+ \rightarrow 1r \\ \times(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r \times = \frac{1}{2} \\ 3r+ \rightarrow 2r \times (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3r+ \rightarrow 1r \times (-3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$\vec{e}_3 = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2, \quad \vec{e}_4 = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad \dots \textcircled{\#}$$

とわかる。 \$\Sigma\$ の基底 \$\vec{e}_j\$ から正規基底 \$\vec{a}_j\$ により \$P\$ を構成する

$$PA = B \quad \text{より} \quad P\vec{a}_j = \vec{e}_j \quad (j=1,2,3,4)$$

とわかるから \$\textcircled{\#}\$ から

$$\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2, \quad \vec{a}_4 = 5\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 \quad \dots \textcircled{\star}$$

\$\Sigma\$ の基底 \$\vec{v} \in \text{Im } A\$ は

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^4 x_j \vec{a}_j$$

と書けるから \$\textcircled{\star}\$ から

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 (3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2) + x_4 (5\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2) \\ &= (x_1 + 3x_3 + 5x_4) \vec{a}_1 + (x_2 - 2x_3 - 2x_4) \vec{a}_2 \end{aligned}$$

と \$\vec{v}\$ は \$\vec{a}_1\$ と \$\vec{a}_2\$ の線形結合である。つまり

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 = \vec{0}$$

とあると \$\Sigma\$ の基底 \$\vec{e}_j\$ により \$P\$ を構成する

$$c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 = \vec{0}$$

\$\Sigma\$ の基底 \$\vec{e}_j\$ から

$$(T_{\Sigma}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ * \end{pmatrix} = \vec{0}$$

より \$c_1 = c_2 = 0\$ \$\Sigma\$ の基底 \$\vec{e}_j\$ から \$\vec{a}_1, \vec{a}_2\$ は基底 \$\vec{e}_j\$ と線形独立である。

よ、 $\dim(A)$ の基底として $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ を取れる。

$$(\text{補足}) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \iff \begin{cases} x_1 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

と仮定。 $x_3 = \alpha, x_4 = \beta$ と置く。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\alpha - 5\beta \\ 2\alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $\text{Ker}(A)$ から $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される。ゆえに

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $\alpha = \beta = 0$ と得られる。よって $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は線形独立である。

よって $\text{Ker}(A)$ の基底は $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ であることが示される。