11/10, 2004 線型代数.

$A\vec{x} = \vec{0}$ を解く

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$x \mathrel{+}= 3$

意味 xに3を加える.

$$\Big\downarrow \; \begin{array}{l} 2r \mathrel{+}= 1r \times (-2) \\ 3r \mathrel{+}= 1r \times 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \; 2r \leftrightarrow 3r$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4r \mathrel{+}= 2r \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; 3r \times= \frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; 1r \mathrel{+}= 2r \times (-2)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & & x_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & x_3 & & x_5 \end{array} \end{array}$$

pivot = 1

pivot の上 0

(行簡約階段行列).

$$\begin{cases} x_1 \quad -4x_3 \quad -3x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 \quad = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$\uparrow$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha,\ x_5 = \beta \\ x_1 = 4\alpha + 3\beta \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \quad -2\beta \\ x_5 = \beta \end{cases}$$

解ける.

Aの階数

rank(A)

‖

(変数の個数) − pivotの個数

= パラメーターの個数.

部分空間.

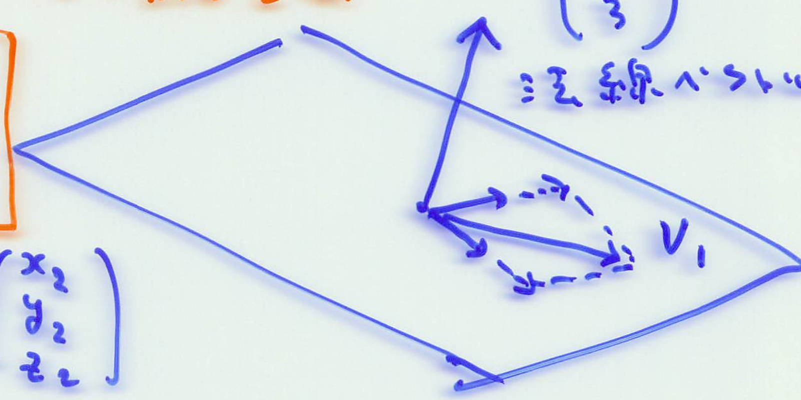
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ;\ x - 2y + 3z = 0 \right\}$$

→ V_1は部分空間

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V_1 \\ \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} + \mu\beta \in V_1 \end{array}}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

法線ベクトル



$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \vec{\beta} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\alpha + \mu\beta = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$$

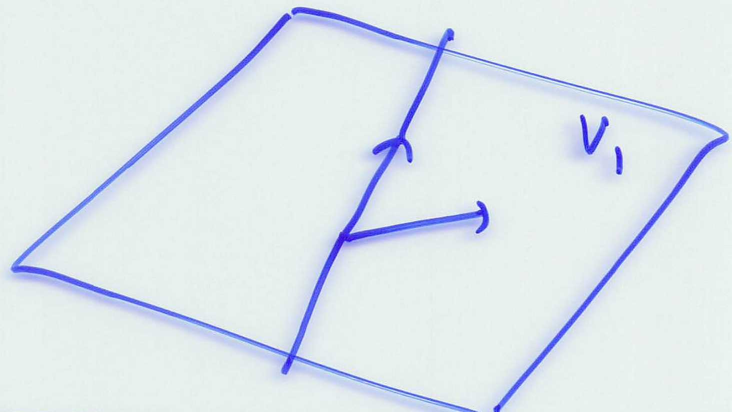
$$(\lambda x_1 + \mu x_2) - 2(\lambda y_1 + \mu y_2) + 3(\lambda z_1 + \mu z_2)$$

$$= \lambda(\underbrace{x_1 - 2y_1 + 3z_1}_{\alpha \in V_1\ \ \shortparallel\ 0}) + \mu(\underbrace{x_2 - 2y_2 + 3z_2}_{\beta \in V_1\ \ \shortparallel\ 0})$$

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \ x - 2y + 3z = 0 \right\} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 ; \ A\vec{x} = \vec{0} \}$$

Aの核　部分空間

kernel

$\underline{\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \ker(A)}$ 　 $A\vec{\alpha} = A\vec{\beta} = \vec{0}$

$$A(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) = \lambda A\vec{\alpha} + \mu A\vec{\beta}$$

$$= \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \in \ker(A)$$

$$\ker(A) \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} 4s + t \\ -3s \\ s \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} = t\vec{\beta}$ または $\vec{\beta} = t\vec{\alpha}$

と書ける

$$\boxed{\vec{0},\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \vec{0} &= 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{0} &= 0 \cdot \vec{e} \end{aligned}}$$

$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$

$s\vec{\alpha} + t\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow s = t = 0$

$s \neq 0$ ならば $\vec{\alpha} = -\dfrac{t}{s}\vec{\beta}$ とかける.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$$

がわかる

$$s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ s \\ * \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} \longrightarrow s = t = 0$$

$\mathrm{Im}(A) = \{ A\vec{x} \,;\ \vec{x} \in \mathbb{R}^5 \}$ $\mathbb{R}^4$ の部分空間.

$\mathrm{Im}(A) \subset \mathbb{R}^4$, $A\vec{x} \in \mathbb{R}^4$

列ベクトルに $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_5$ で表す.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4\ \vec{a}_5)$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 + x_5\vec{a}_5$$

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3\ \vec{b}_4\ \vec{b}_5)$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{b}_3 &= -4\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 \\ \vec{b}_5 &= -3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_4 \end{aligned}\right) \to \begin{aligned} \vec{a}_3 &= -4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 \\ \vec{a}_5 &= -3\vec{a}_1 + \vec{a}_4 \end{aligned}$$

行基本変形 ⟷ 基本行列を左からかける

1行と4行の交換

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

正則.

P : 正則

$$B = \underbrace{\boxed{P_l \cdots P_2 P_1}}_{=P} A \qquad P_j : \text{基本行列.}$$

$$\vec{b}_j = P\vec{a}_j \quad (j = 1, 2, \cdots, 5)$$

$$P\vec{a}_3 = -4P\vec{a}_1 + 3P\vec{a}_2$$

両辺に P^{-1} をかける $\quad \vec{a}_3 = -4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$

$$\mathrm{Im}(A) \ni x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\underbrace{\vec{a}_3}_{= -4\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2} + x_4\vec{a}_4 + x_5\underbrace{\vec{a}_5}_{= -3\vec{a}_1 + \vec{a}_4}$$

$$\begin{aligned} &= (x_1 - 4x_3 - 3x_5)\vec{a}_1 \\ &\quad + (x_2 + 3x_3)\vec{a}_2 \\ &\quad + (x_4 + x_5)\vec{a}_4 \end{aligned}$$

$$x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + x_4\vec{a_4}$$

$$\underbrace{c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_4\vec{a_4}}_{} = \vec{0}$$

$$P\vec{a_j} = \vec{e_j}$$

$$\rightarrow P(c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_4\vec{a_4}) = P\vec{0} = \vec{0}$$

$$\parallel$$

$$c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_4\vec{e_4} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_4 \\ * \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow c_1 = c_2 = c_4 = 0$$

$$c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_4\vec{a_4} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_4 = 0$$

自明な線形関係しかない..

$\vec{a_1} = \alpha\vec{a_2} + \beta\vec{a_4}$ とは書けない..

$\mathrm{Im}(A) \ni \vec{\alpha}$

1) $\vec{\alpha} = c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_4\vec{a_4}$

と $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ で表される

2) $c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_4\vec{a_4} = \vec{0}$

$\Longrightarrow c_1 = c_2 = c_4 = 0$

($\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ は線形独立)

$\rightsquigarrow$ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_4}$ は $\mathrm{Im}(A)$ の基底

という.

$\mathrm{Im}(A)$ は 3次元.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 7 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}(A)$の基底を求める