

10月27日 角平答

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2r+ = 1r \times (-2) \\ 3r+ = 1r \times 1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xleftarrow{\substack{4r+ = 2r \\ \times (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r \times = \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r+ = 2r \times (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

= 9 3T 1/3 1/3 1/3 1/3 1/3 1/3

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

と 10/10 2/10. $x_3 = \alpha$, $x_5 = \beta$ と 2/10

$$\begin{cases} x_1 = 4\alpha + 3\beta \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = -2\beta \\ x_5 = \beta \end{cases}$$

Σ 1/10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$$

$$\ker(A) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^5; A\vec{x} = \vec{0} \}$$

とある。

$$\vec{x}, \vec{y} \in \ker(A)$$

とある。

$$A(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} = \vec{0}$$

より

$$\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in \ker(A)$$

$\Sigma = \frac{1}{10} T = 3$.

$$- \text{例} \quad V \subset \mathbb{R}^n \text{ と}$$

$$\vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in V$$

$\Sigma = \frac{1}{10} T = 3$ と $\exists$, V は $\frac{1}{10} T$ の空間である。

$$\vec{x} \in \ker(A) \text{ とある}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha + \beta \\ -3\alpha \\ \alpha \\ -2\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $2 \neq 9$ のように

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と $3 \neq 5$ のように

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 = \vec{0}$$

とある

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ \alpha \\ * \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

より $\alpha = \beta = 0$ となり, $\vec{v}_1$ は $\vec{v}_2$ の定数倍で, $\vec{v}_2$ は $\vec{v}_1$ の定数倍でないので線形独立である。

一般に部分空間 $\mathcal{P}_1^{(2)}$ V があるとは

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$
が V の基底であるとは

1) 任意の $\vec{v} \in V$ に対して

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k$$

と書ける.

$$2) \quad c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$$

上の条件は

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ が $\ker(A)$ の基底

と等しい.

補足 上の $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_5)$ とする. $\vec{a}_i$ は $\mathbb{R}^4$ の基底.

ある. $\mathbb{R}^4$ 中

$$I_m(A) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^4; \vec{y} = A\vec{x} \text{ かつ } \vec{x} \in \mathbb{R}^5 \text{ の任意の元} \right\}$$

と定める. $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in I_m(A)$ とする.

$$\vec{w}_1 = A\vec{v}_1, \vec{w}_2 = A\vec{v}_2$$

とすると $\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 = A(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2)$

$$\begin{aligned} \lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 &= \lambda A\vec{v}_1 + \mu A\vec{v}_2 \\ &= A(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) \end{aligned}$$

より

$$\lambda \vec{w}_1 + \mu \vec{w}_2 \in I_m(A)$$

とわかる. よって $I_m(A)$ は 部分空間 である.

