- 正方行列の基本定理 $n=3$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \\ a_3 x + a_3 y + c_3 z = 0 \end{cases}$$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ を考える.

$A\vec{0} = \vec{0}$

$\vec{0}$ は自明な解

$$\boxed{|A| = 0 \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ を満たす } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ が存在.}}$$

- $|A| \neq 0 \Rightarrow \left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right)$

クラメール

$$x = \frac{1}{|A|} \left| \vec{0}\ \vec{b}\ \vec{c} \right| = 0, \quad y = z = 0$$

$$A\vec{v} = \vec{q}$$

$$x = \frac{\left| \vec{q}\ \vec{b}\ \vec{c} \right|}{|A|} \leftarrow |A| \neq 0.$$

- $|A| = 0 \Rightarrow$ 非自明解あり.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ a_2 & \vec{b} & \vec{c} \\ a_3 & & \end{pmatrix}$$

仮定 $|A| = 0$

① $\vec{a} = \vec{0}$ のとき

$$(\vec{0}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{b} + 0\cdot\vec{c} = \vec{0}$$

非自明解.

② $a_1 \neq 0$ or $a_2 \neq 0$ or $a_3 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ a_2 & \vec{b} & \vec{c} \\ a_3 & & \end{pmatrix}$$

例 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ a_2 \neq 0 & \vec{b} & \vec{c} \\ a_3 & & \end{pmatrix}$

↓ 1行と2行交換 行列式 → (-1)倍

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

1行 $\times \left(-\dfrac{a_3}{a_2}\right)$ を3行に+

↓ ← 行列式不変

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = D$$

行列式 = 0.

$-|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = 0$

‖

$| D | = 0$

‖ ← 1列で展開.

$$\underset{0}{\overset{a_2}{\not\parallel}} \begin{vmatrix} b_1 & c_2 \\ * & * \end{vmatrix} \rightsquigarrow$$

‖

0

$B\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = 0$ をみたす

$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ あり.

B : 2×2.

$|B| = 0 \iff$

$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ をみたす

非自明解あり.

$$\left(\begin{array}{c|cc} a_2 & b_2 & c_2 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & D \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{a_2}(b_2 y + c_2 z)}$$

まとめ　A：3次正方行列

$$|A| \neq 0 \iff (A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0})$$

$|A| = 0 \iff$ ($A\vec{v} = \vec{0}$ をみたす $\vec{v} \neq \vec{0}$ が存在.

$\iff$　A：正則.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$AX = XA = I_3$ をみたす 3次正方行列 X が存在.

$$\left.\begin{array}{l} AX = XA = I_3 \\ AY = YA = I_3 \end{array}\right\} \rightsquigarrow \quad AX = I_3. \quad Y(AX) = YI_3 = Y$$

$\parallel$ ← 結合則

$$X = I_3 X = (YA)X$$

$\rightsquigarrow$ $X = Y$.　$\boxed{\text{逆行列は存在すると唯一つ}}$

ベクトルの内積

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x})$$ $\vec{x}$ のノルム.

- $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$
- $(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{z}) = \lambda(\vec{x}, \vec{z}) + \mu(\vec{y}, \vec{z})$
- $(\vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{z}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}) + \mu(\vec{x}, \vec{z})$

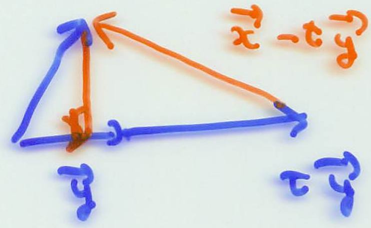
$$\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

$= (\vec{x} \pm \vec{y}, \vec{x} \pm \vec{y}) = \cdots$

前提 $\vec{y} \neq \vec{0}$

$$\|\vec{x} - t\vec{y}\|^2$$

$$= \|\vec{y}\|^2 t^2 - 2(\vec{x}, \vec{y})\, t + \|\vec{x}\|^2$$

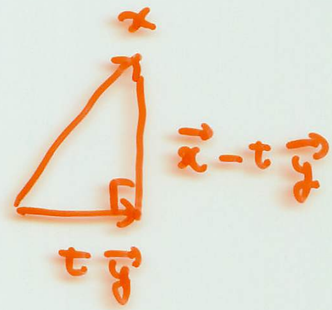


$$= \|\vec{y}\|^2 \left(t - \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2} \right)^2 - \frac{(\vec{x}, \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2} + \|\vec{x}\|^2$$

公式

$\|t\vec{y}\| = |t|\,\|\vec{y}\|$

$t = \dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2}$ のとき 最小 $\longrightarrow$



$$(\vec{x} - t\vec{y}, \vec{y}) = 0$$

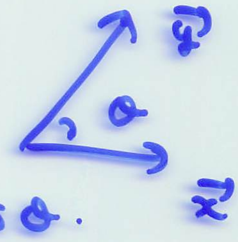
$$\|$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) - t \underbrace{\|\vec{y}\|^2}_{\neq 0} \rightsquigarrow t = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2}$$

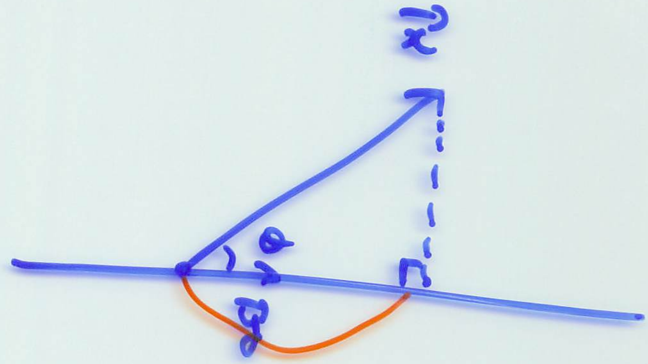
$\dfrac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}$ $\quad$ $\vec{x}$ の $\vec{y}$ 方向への正射影

$\rightsquigarrow$ 回帰直線と関係する

2つ目・3つ目



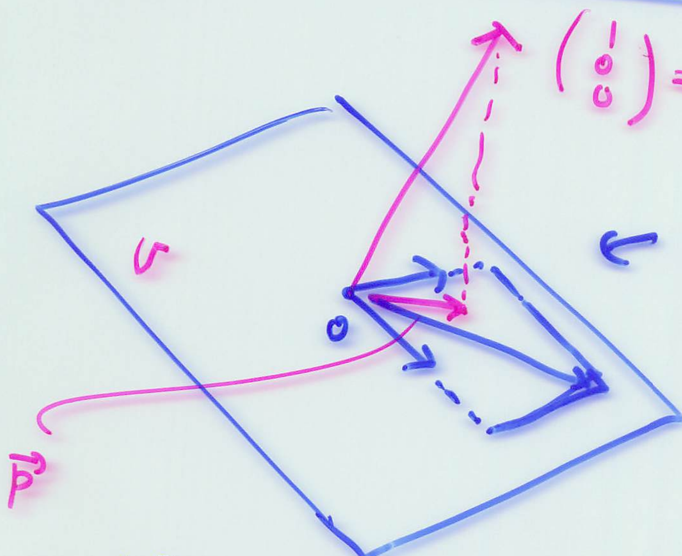
$$(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\theta.$$



$$\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{y}\|} \vec{y}$$

$$= \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}.$$

$$\|\vec{x}\| \cos\theta. = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{y}\|}$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

V

$x - y + z = 0$

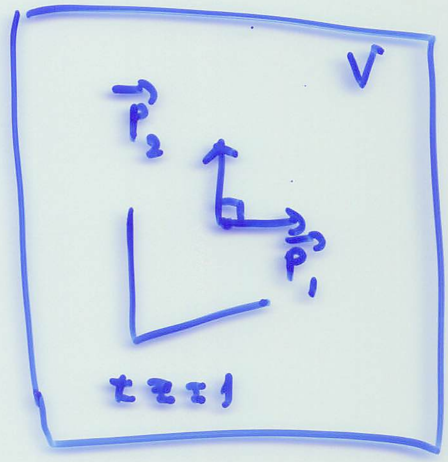
$x = y - z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} - \vec{p} \perp V \\ \vec{p} \in V \end{array}\right\} \longrightarrow \vec{p} : \vec{x} の V への直交射影$$

(正射影)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

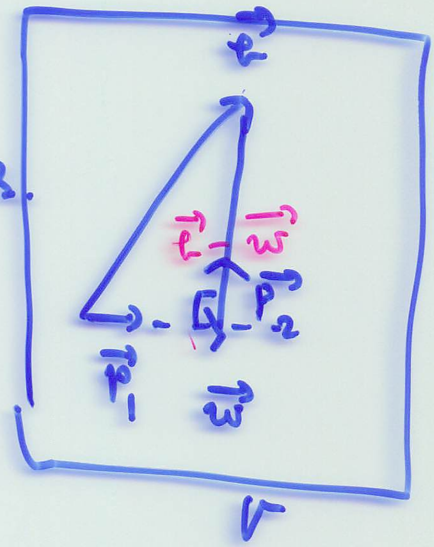


step 1

$\vec{a}$ 方向の単位ベクトル

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

step 2 $\vec{b}$ の $\vec{p}_1$ 方向への正射影を作る.



$$\vec{w} = \frac{(\vec{p}_1, \vec{b})}{\underbrace{\|\vec{p}_1\|^2}_{1}}\vec{p}_1$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\vec{b} - \vec{w}) \perp \vec{p}_1$

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{b} - \vec{w}$ 方向の単位ベクトル

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

グラム・シュミットの直交化.

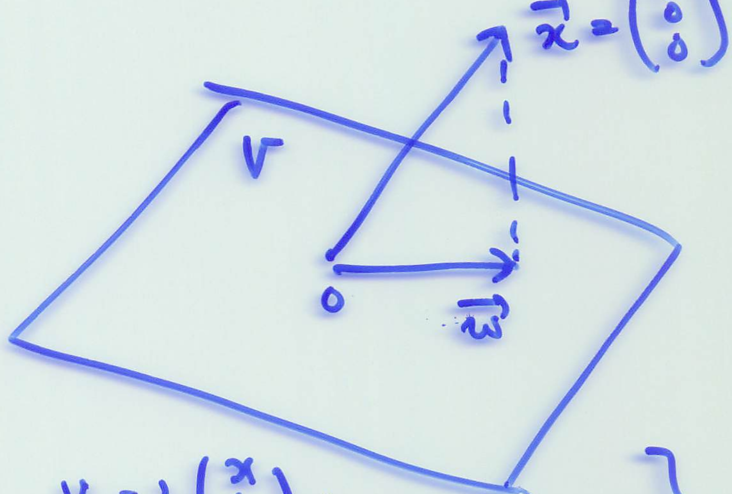
$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V \qquad \|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1$

$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$

V の正規直交基底.

$\vec{w} \in V$

$(\vec{x} - \vec{w}) \perp V$



$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x - y + z = 0 \right\}$

$$\boxed{\vec{w} = \underbrace{(\vec{x}, \vec{p}_1)\,\vec{p}_1}_{\vec{x}\text{の}\vec{p}_1\text{方向への正射影}} + \underbrace{(\vec{x}, \vec{p}_2)\,\vec{p}_2}_{\vec{x}\text{の}\vec{p}_2\text{方向への}\cdots}}$$

---

1) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; x + 2y - z = 0 \right\}$

の正規直交系を作る.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & -6 \\ 1 & 3 - \lambda & -2 \\ 2 & 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

をみたす λ を求めよ.