経済数学入門 I　レポート問題

I　$w = f(x, y, z)$

$$= 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2yz + 4zx - 2xy$$

の停留点を求めよ。

II　$ab \neq 0$ とする

$$z = f(x, y) = \frac{ax + by + c}{x^2 + y^2 + 1}$$

の停留点を求めよ.

III　$z = f(x, y) = (x^2 - y^2)\, e^{-x^2 - y^2}$

の停留点を求めよ.

IV　$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で

$$z = f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

の極値問題を考える.（停留点を求める）

V　$x^2 + y^2 = 1$ の下で　$z = 2x^3 + y$ の停留点を求めよ.

経済数学IA　7月6日　　em2004

I
$$\begin{cases} g_1 = x^2+y^2+z^2-1=0 & \cdots ① \\ g_2 = x+y+z=0 & \cdots ② \end{cases}$$
の下で
$$w = f = x+2y+3z$$
の極値問題を考える。

$$g_{1x}=2x,\ g_{1y}=2y,\ g_{1z}=2z$$
$$g_{2x}=g_{2y}=g_{2z}=1$$
$$f_x=1,\ f_y=2,\ f_z=3$$
より (x, y, z) で極値をとるならば
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
をみたす $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ が存在する。
$$\begin{pmatrix}1 & x & 1\\2 & y & 1\\3 & z & 1\end{pmatrix}\underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}1\\-2\lambda\\-\mu\end{pmatrix}}}_{\neq 0} = \vec{0}$$
(1行目)×(−2)を2行目に
(1行目)×(−3)を3行目に

とみると
$$0 = \begin{vmatrix}\boxed{1 \quad x \quad 1}\\2 & y & 1\\3 & z & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & x & 1\\0 & y-2x & -1\\0 & z-3x & -2\end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix}y-2x & -1\\z-3x & -2\end{vmatrix}$$
$$= x-2y+z \quad \cdots ③$$
が必要である。②と③から得られる
$$\begin{cases} x-2y=-z \\ x+y=-z \end{cases}$$
を x, y について解くと
$$x=-z,\ y=0$$
が成立する。これを①に代入して　$x^2+y^2+z^2=1$
$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (\text{複号同順})$$
を得る。　$\mu=2$,　$1=\lambda\times(\pm\sqrt{2})+2$

, $\lambda = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{array}\right\}$$ の下で

$$w = f(x,y,z)$$

の極値を求める.

(a,b,c) で極値をとる

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda g_{1x} + \mu g_{2x} = f_x \\ \lambda g_{1y} + \mu g_{2y} = f_y \\ \lambda g_{1z} + \mu g_{2z} = f_z \\ \quad g(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

A: n次正方行列

($A\vec{x}=\vec{0}$ をみたす $\vec{x}\neq\vec{0}$ がある)

$\Leftrightarrow$ $\det(A)=0$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu \\ \nu\end{pmatrix} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$$

lambda. mu nu

Ⅱ $g = x + y + z - 1 = 0$ の下で $w = xy^2z^3$ の停留点を求めよ．$(x, y, z > 0)$

$$g_x = g_y = g_z = 1,\quad f_x = y^2z^3,\quad f_y = 2xyz^3$$
$$f_z = 3xy^2z^2$$

から

$$\begin{pmatrix} y^2z^3 \\ 2xyz^3 \\ 3xy^2z^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をみたすλが存在する．

が ~~成立する~~．　$x, y, z > 0$ より

$$y^2z^3 = 2xy^2z^3 \iff 2x = y$$
$$y^2z^3 = 3xy^2z^2 \iff 3x = z$$

を得るので，$y = 2x$, $z = 3x$ を $x + y + z = 1$ に代入して

$$x = \frac{1}{6},\quad y = \frac{1}{3},\quad z = \frac{1}{2}$$　　$\lambda = ?$

Ⅰ $\begin{cases} g_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \cdots ① \\ g_2 = x + y + z = 0 \cdots ② \end{cases}$

の下で $w = f = x + 2y + z$ の停留点を求めよ

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\lambda \\ -\mu \end{pmatrix} = \vec{0}$$ から

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & x-2y & -1 \\ 0 & x-z & 0 \end{vmatrix} = x - z$$

から $x = z$ を得る．$y = -x - z = -2x$ を従う．①に

$z = x$, $y = -2x$ を代入して　$x^2 + 4x^2 + x^2 = 1$ から

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ となり

$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$ 同順

ロードマップ

1) 2次の正方行列 A.

A^n を求める. ← ケーリー・ハミルトン

対角化 ⇝ A^n

⇝ 微分方程式 $\boxed{\text{(後期)}}$

2) $f(x,y)=0$

I 停留点を求める.

II f_{xx}

$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$

極大・極小の判定.

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

A: 対称 $= \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

P: 回転. ${}^tPP = P\,{}^tP = I_2$

[redacted] ${}^tP A P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $\quad {}^tP = P^{-1}$

$x^2+y^2=1$ の下で

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$= ax^2+2cxy+by^2$ の最大・最小.

↓ $\xi^2+\eta^2=1$ の下で

$\alpha\xi^2+\beta\eta^2$ の最大最小.

0) 差分式

$a_{n+2}+p\,a_{n+1}+q\,a_n=0$

→ (後期) 3変数, 4変数 …

極大・極小の判定.

ロードマップ (その2)

Lagrangeの未定乗数法

1) $g(x,y)=0$ の下で $z=f(x,y)$

停留点.

十分条件 ← 今回

2) $g(x,y,z)=0$ の下で $w=f(x,y,z)$

停留点.

十分条件 → 後期

3) $g_1=g_2=0$ の下で $w=f$

停留点

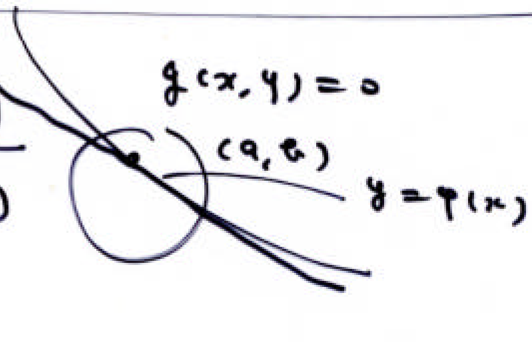
十分条件 → 後期

接平面, 接線.

$F(s,t)=f(x(s,t),\ y(s,t))$

$\frac{\partial F}{\partial s} = ?\quad \frac{\partial F}{\partial t} = ?$

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}$$



241 pageから

$g(x,y)=0$ の下で

$z=f(x,y)$

1) $g_x(a,b)^2+\boxed{g_y(a,b)^2}\neq 0$ と仮定

2) (a,b) で極値をとる.

$g_y(a,b)\neq 0$

OR

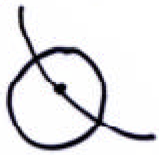
$\boxed{g_x(a,b)\neq 0}$

陰関数定理

→ (a,b) の近くで

$y=\varphi(x)$

$x=\psi(y)$ と表せる



$y=\varphi(x)$

$F(t)=f(t,\varphi(t)) \rightsquigarrow F'(a)=0$

$F'(t)=f_x\cdot 1+f_y\,\varphi'(t)$

$\boxed{F''(t)=?}$

$f_x(a,b)+f_y(a,b)\boxed{\varphi'(a)}=0$

$g(t,\varphi(t))\equiv 0 \longrightarrow g_x(t,\varphi(t))+g_y(t,\varphi(t))\varphi'(t)\equiv 0$

$$\varphi'(a)=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

定理

$F'(a)=0$

$F''(a)>0$ $(<)$

↓

極小 (大)

$$f_x(a,b)=\frac{g_x(a,b)\,f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$$

$\boxed{\dfrac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}}$ “λ”

$$\begin{cases} f_x(a,b)=\lambda\, g_x(a,b) \\ f_y(a,b)=\lambda\, g_y(a,b) \end{cases}$$

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$F''(t) = f_{xx} \cdot 1 + f_{xy} \cdot \varphi' + \qquad \boxed{\varphi' = -\frac{g_x}{g_y}}$$

$$(f_{yx} \cdot 1 + f_{yy} \varphi') \cdot \varphi' + f_y \varphi''(t)$$

$$= f_{xx} + 2 f_{xy} \varphi' + f_{yy} (\varphi')^2 + f_y \varphi''$$

$$g_x^{(t, \varphi(t))} + g_y \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

t で微分する.

$$g_{xx} + 2 g_{xy} \varphi' + g_{yy} (\varphi')^2 + g_y \varphi'' \equiv 0.$$

$$\varphi'' = -\frac{1}{g_y} \left(g_{xx} + 2 g_{xy} \varphi' + g_{yy} (\varphi')^2 \right)$$

$$F''(t) = f_{xx} + 2 f_{xy} \varphi' + f_{yy} (\varphi')^2$$

$$- \frac{f_y}{g_y} \left(g_{xx} + 2 g_{xy} \varphi' + g_{yy} (\varphi')^2 \right)$$

$P_0 = (a, b)$

$$F''(a) = f_{xx}(P_0) - \lambda g_{xx}(P_0)$$

$$+ 2 \left(f_{xy}(P_0) - \lambda g_{xy}(P_0) \right) \varphi'(a)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)}}$$

$$+ \left(f_{yy}(P_0) - \lambda g_{yy}(P_0) \right) (\varphi'(a))^2$$

$$L(x, y, \lambda) = f - \lambda g$$

Lagrange 関数

$$\boxed{\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}}$$

$$F''(a) = L_{xx}(a,b,\lambda) - 2L_{xy}(a,b,\lambda)\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} + L_{yy}(a,b,\lambda)\left(\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}\right)^2$$

$$= \frac{1}{g_y^2}\left(L_{xx}\, g_y^2 - 2L_{xy}\, g_x g_y + L_{yy}\, g_x^2\right)$$

$$= -\overset{>0}{\frac{1}{g_y^2}} \underbrace{\boxed{\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}}}_{=B}$$

$$F''(a) > 0 \iff B < 0 \iff \text{極小}$$

$$F''(a) < 0 \iff B > 0 \iff \text{極大}$$

$$L = f - g\lambda$$

$$\lambda = -\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$$

134

$g = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で.

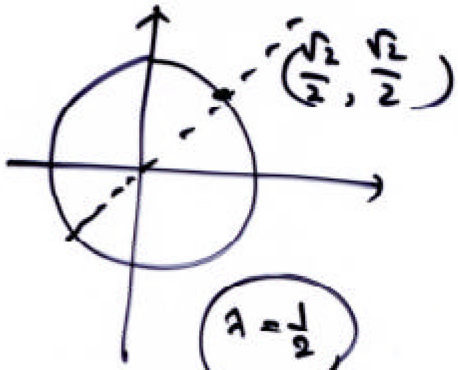
$f = xy$

$\boxed{x, y > 0}$

$g_x = 2x,\ g_y = 2y$

$f_x = y,\ f_y = x.$

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 2x \\ x = \lambda \cdot 2y \end{cases} \rightsquigarrow$$



$\lambda = \frac{1}{2}$

$g_{xx} = 2,\ g_{xy} = g_{yx} = 0,\ g_{yy} = 2$

$f_{xx} = 0,\ f_{xy} = f_{yx} = 1,\ f_{yy} = 0$

$L_{xx} = \cancel{2}\, 0 - \frac{1}{2} \times 2 = -1$

$L_{xy} = 1 - \frac{1}{2} \times 0 = 1$

$L_{yy} = 0 - \frac{1}{2} \times 2 = -1$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1 \quad -1 \quad 1} \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$2 \times \left\{ \underbrace{(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{0} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \cancel{4}\, 8 > 0$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ で 極大.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

1列の余因子展開

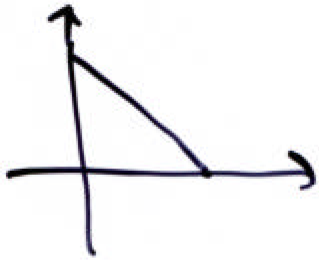
小テスト

$x, y > 0$

① $g(x, y) = x + y - 1 = 0$ の下で

$$z = f(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

を考える.



② g: 同じ

$$f = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$