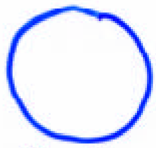
6月23日小テスト解答

(I) $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で

$$z = f(x,y) = xy$$



を考えます。

unit circle

$$\nabla(f) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad \nabla(g) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

から，

$\nabla(f) = \lambda\nabla(g)$ をみたす λ が存在

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 2x & \cdots ① \\ x = \lambda \cdot 2y & \cdots ② \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$y=0 \xrightarrow{②} x=0$

× ③を満たさない

を解けば停留点が求まります。

$y = 2\lambda \cdot \lambda 2y$
$= 4\lambda^2 y$ ⟶ $1 = 4\lambda^2$
$\lambda = \pm\frac{1}{2}$

① − ②

$$y - x = 2\lambda(x - y)$$

から $(x-y)(2\lambda+1) = 0$ が得られます。従って

$$x = y \text{または} \lambda = -\frac{1}{2}$$

が成立します。（必要条件）

(i) $x=y$ のとき ③ に代入して

$$x=y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

が従いますから $\lambda=\frac{1}{2}$ となります。

(ii) $\lambda=-\frac{1}{2}$ のとき ① に代入して$x=-y$ が成立します。③ に代入して

$$x=-y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を得ます。

以上で

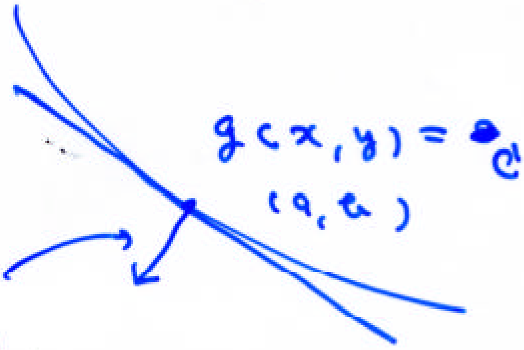
$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

が停留点です。

Review

§ 面2 ~ stu

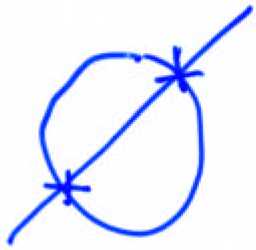
$$\nabla(g)(a,b) = \begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix}$$



$\lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow x = y$

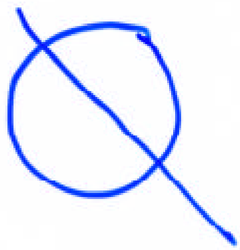
$(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

複号同順



$\lambda = -\frac{1}{2} \longrightarrow x = -y$

$(x,y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



(II)　関数

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4y - 2$$

の極値問題を考えます。

$$\begin{cases} z_x = 2x + y = 0 & \cdots ① \\ z_y = x + 2y - 4 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を解くと $(x, y) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ が停留点であることが分かります。また

$$z_{xx} = 2,\ z_{xy} = z_{yx} = 1,\ z_{yy} = 2$$

から

極小、

$$z_{xx} = 2 > 0$$

Hesse 行列式

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 - 1^2 = 3 > 0$$

より、この停留点は極小点であることが分かります。

条件付極値問題

$g(x, y, z) = 0$ の下で

$$w = f(x, y, z)$$

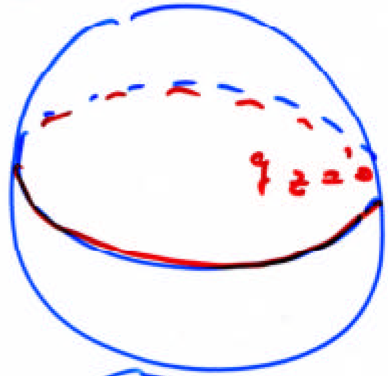
$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$g_z = 2z$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$z = 0$

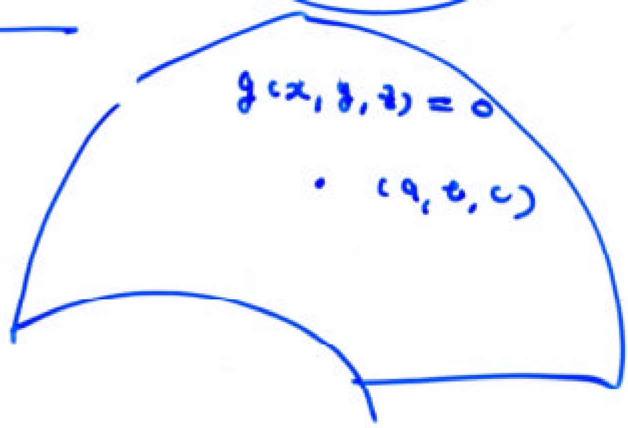
$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



(a, b, c) の近くで

$$z = \varphi(x, y)$$

と解けたとする.



$$g(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0$$

$$(x, y) \sim (a, b)$$

$$g(s, t, \varphi(s, t)) \equiv 0$$

$$\begin{cases} g_x \cdot 1 + g_y \cdot 0 + g_z \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \\ g_x \cdot 0 + g_y \cdot 1 + g_z \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(s,t) = g(\underbrace{X(s,t),\ Y(s,t),\ Z(s,t)}\ )$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial s} = g_x(\quad)\cdot\dfrac{\partial X}{\partial s} + g_y\cdot\dfrac{\partial Y}{\partial s} + g_z\cdot\dfrac{\partial Z}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = g_x\cdot\dfrac{\partial X}{\partial t} + g_y\dfrac{\partial Y}{\partial t} + g_z\dfrac{\partial Z}{\partial t} \end{cases}$$

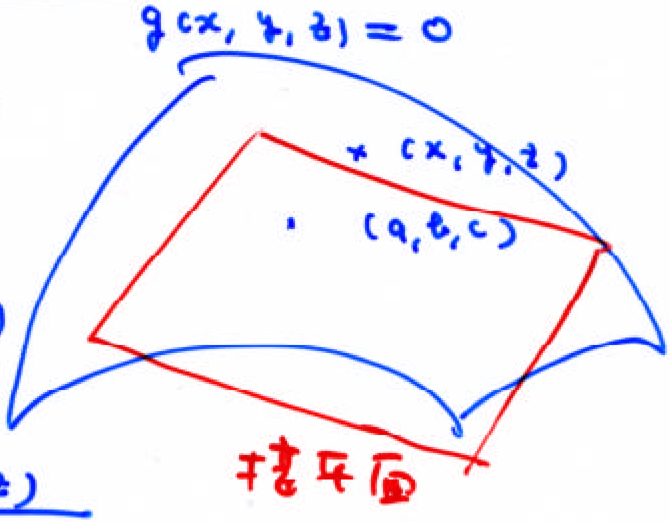
$$F(t) = f(\underbrace{x(t),\ y(t)}_{\ell})$$

$$\to F'(t) = f_x(\quad)\,x'(t) + f_y(\quad)\,y'(t).$$

$z = \varphi(x,y)$ と書けて いるとする.

$g_z(a,b,c) \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\dfrac{g_x(x,y,z)}{g_z(x,y,z)} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial \cancel{x} y} = -\dfrac{g_y(x,y,z)}{g_z(x,y,z)} \end{cases}$$



$z = \varphi(x,y)$ $\quad$ $(a, b, f(a,b,c))$ の接平面

$$\boxed{z = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b)(y-b) + \underbrace{\varphi(a,b)}_{c=}}$$

$$z = -\frac{g_x(a,b,c)}{g_z(a,b,c)}(x-a) - \frac{g_y(a,b,c)}{g_z(a,b,c)}(y-b) + \varphi(a,b)$$

$P_0 = (a,b,c)$

接平面の方程式

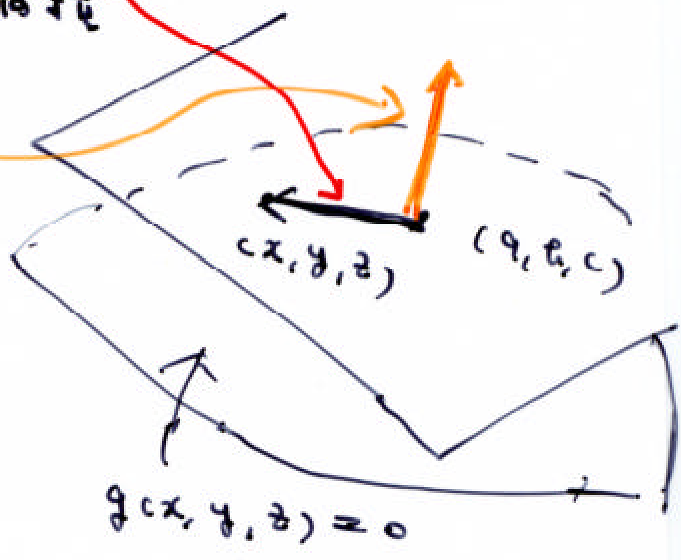
$$\boxed{g_x(P_0)(x-a) + g_y(P_0)(y-b) + g_z(P_0)(z-c) = 0}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} g_x(P_0) \\ g_y(P_0) \\ g_z(P_0) \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}} = 0$$

内積

法線方向

$\nabla(g)(P_0)$



(5) 面2ページ 5んい

$g(x,y,z)=0$ の下で

$$w=f(x,y,z)$$

の極値を考える

Hypothesis

仮 $g(a,b,c)=0$

$g_z(a,b,c)\neq 0$

(a,b,c) で極値をとる

陰関数定理.

(a,b,c) の近くで

$g(x,y,z)=0$ が… $z=\varphi(x,y)$ と

表せる

$F(s,t):=f(s,t,\varphi(s,t))$ → (a,b) は F の停留点

$\varphi(a,b)=c$

$$0=\frac{\partial F}{\partial s}(a,b)$$

$$=f_x\cdot 1+f_y\cdot 0+f_z\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

$$0=\frac{\partial F}{\partial t}(a,b)$$

$$=f_x\cdot 0+f_y\cdot 1+f_z\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

これを整理すると

$$\begin{cases} f_x(a,b,c)+f_z(a,b,c)\boxed{\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}(a,b)}=0 & ① \\ f_y + f_z \boxed{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}} = 0 & ② \end{cases}$$

= ?

= ?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(a,b) = -\dfrac{g_x}{g_z} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(a,b) = -\dfrac{g_y}{g_z} \end{cases}$$

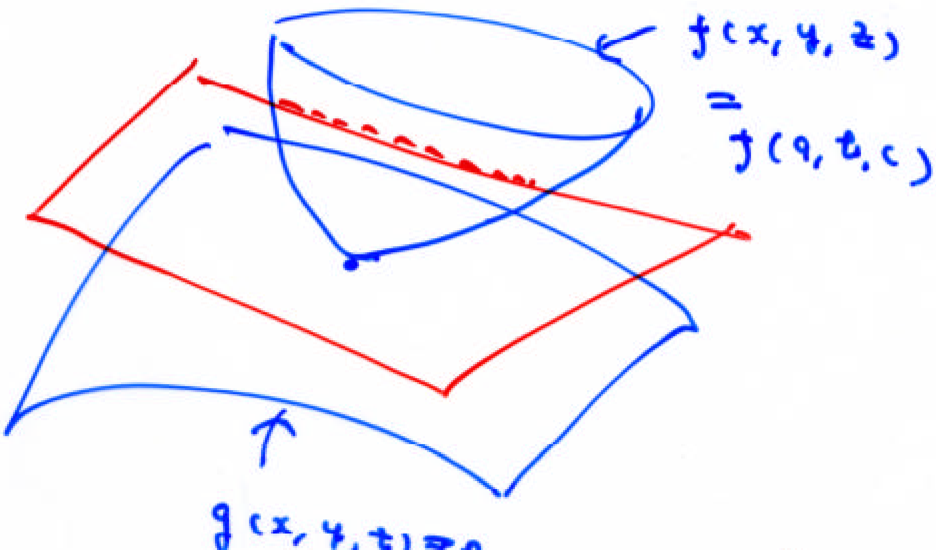
$$\begin{cases} f_x - g_x \overbrace{\boxed{\dfrac{f_z}{g_z}}}^{=\lambda} = 0 \\[2ex] f_y - g_y \underbrace{\boxed{\dfrac{f_z}{g_z}}}_{=\lambda} = 0 \end{cases} \qquad \lambda = \frac{f_z}{g_z}$$

$$(*) \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \end{cases} + \; g(x,y,z) = 0$$

となる λ が存在.

(a,b,c)

$$\nabla(f)(a,b,c) = \lambda \nabla(g)(a,b,c)$$



$\rightarrow$ $\{g(x,y,z)=0\}$ と $\{f = f(a,b,c)\}$ が (a,b,c) で接している.

I $\quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

の下で

$w = f(x, y, z) = 3x - y + 2z$

II. $g = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$

より点 $(1, 1, 2)$ において $z = g(x, y)$ と

解く.

$$g_x(1,1),\ g_y(1,1) = ?$$