

Ich lernete Deutsche
als war ich student in der Universität
Tokyo.

$z = x^3 + y^3 + 6xy$ の停留点を求めよ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6y = 0 \cdots \textcircled{1} &\Leftrightarrow x^2 = -2y \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 6x = 0 \cdots \textcircled{2} &\Leftrightarrow y^2 = -2x \end{aligned}$$

② から $x = -\frac{1}{2}y^2$ を得るが、これを ① から得られる $y = -\frac{1}{2}x^2$ に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}y^2 \right)^2 = -\frac{1}{8}y^4$$

が導かれる。従って

$$y(y^3 + 8) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ oder } y^3 = -8$$

から $y = 0$ または $y = -2$ であることが必要である。このとき

- (i) $y = 0$ のとき ② に代入して $x = 0$
- (ii) $y = -2$ のとき ② から $x = -2$ を得る。

以上で停留点は

$$(x, y) = (0, 0) \text{ または } (-2, -2) \leftarrow \text{停留点}$$

である。

(以下は後のための参考である。)

$$z_{xx} = 6x, z_{xy} = z_{yx} = 6, z_{yy} = 6y$$

から

$$\begin{aligned} D &= z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \\ &= (6x)(6y) - 6^2 \\ &= 6^2(xy - 1) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

Hesse 3x3 行列

が得られる。

- (i) $(0, 0)$ のとき $D = 6^2(-1) < 0$ から $(0, 0)$ では極大値, 極小値をとらない。

- (ii) $(-2, -2)$ のとき $D = 6^2((-2)(-2) - 1) = 6^2 \cdot 3 > 0$

$$z_{xx}(-2, -2) = 6(-2) = -12 < 0$$

であるので $(-2, -2)$ で極大値をとることが分る。

(a, b) = 停留点 ① $z_{xx} \geq 0$
 $\det H(f) > 0 \Rightarrow$ 極大値
 ② $\det H(f) < 0 \Rightarrow$ 極小値

Review

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

$$F(t) = f(a + \alpha t, b + \beta t)$$

$$F'(t) = \alpha f_x(a + \alpha t, b + \beta t) + \beta f_y(a + \alpha t, b + \beta t)$$

$$\leadsto \begin{matrix} t=0 \\ F'(0) = \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b) \\ = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \nearrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ (a, b) \end{matrix}$$

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$\downarrow$

$$F'(t) = f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t)$$

$$F''(t) = \alpha^2 f_{xx}(a + \alpha t, b + \beta t)$$

$$+ 2\alpha\beta f_{xy}(\quad)$$

$$+ \beta^2 f_{yy}(\quad)$$

$\leadsto \underline{t=0}$

$$F''(0) = \alpha^2 f_{xx}(a, b) + 2\alpha\beta f_{xy}(a, b)$$

$$+ \beta^2 f_{yy}(a, b)$$

$$= (H(f)(a, b) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix})$$

Hesse's 3'1)

$$H(f)(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}(a, b)$$

3-D 3'1)

$$\det(H(f)(a, b)) < 0$$

$\leadsto$ 固有値 $c_1 > 0, c_2 < 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \text{ 対称行列.}$$

A の固有方程式:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - b) - c^2 \\ = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ab - c^2)$$

$$D = (a+b)^2 - 4(ab - c^2) \\ \text{判別式} = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0$$

$$D = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ かつ } c = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D > 0 \leadsto 2 \text{ 相異なる } \textcircled{\text{実数}}$$

角行列の対角化

(証明略!)

$$P + Q = a + b, \quad PQ = ab - c^2$$

$$P \text{ と } Q \text{ が異符号} \Leftrightarrow PQ < 0$$

$$\Leftrightarrow ab - c^2 < 0$$

教科書

高校数学の

役に立つ。

$$P > 0, \quad Q < 0$$

$$P \leftrightarrow \vec{v}_1 \\ Q \leftrightarrow \vec{v}_2$$

固有ベクトル

$$\textcircled{1} \quad \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{0}$$

$$\underbrace{(A \vec{v}_1)}_{P \vec{v}_1}, \underbrace{\vec{v}_1}_{\vec{v}_1} = (P \vec{v}_1, \vec{v}_1) = P \|\vec{v}_1\|^2 > 0$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \neq \vec{0}$$

$$\underbrace{(A \vec{v}_2)}_{Q \vec{v}_2}, \underbrace{\vec{v}_2}_{\vec{v}_2} = (Q \vec{v}_2, \vec{v}_2) = Q \|\vec{v}_2\|^2 < 0$$

$$\det H(f)(q, t) < 0$$

→ 对给定的 $H(f)(q, t)$

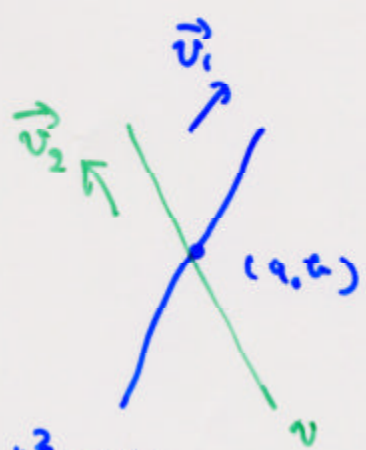
存在值 $c_1 > 0, c_2 < 0$ 使得

$\downarrow$
 $\vec{v}_1$

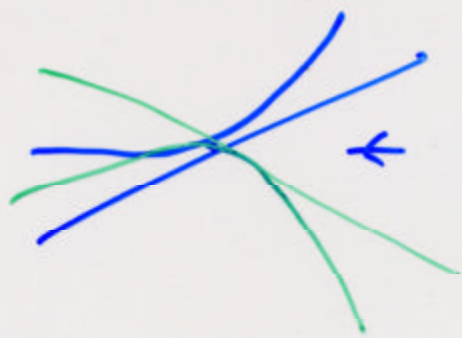
$\downarrow$
 $\vec{v}_2$

① $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \vec{v}_1, a \in \mathbb{R}$

$$F''(0) = (H(f)\vec{v}_1, \vec{v}_1) \\ = c_1 \|\vec{v}_1\|^2 > 0$$



② $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \vec{v}_2, a \in \mathbb{R} \quad F''(0) = c_2 \|\vec{v}_2\|^2 < 0$



鞍点
saddle point.

总结

$$F'(c) = 0 \quad F''(c) > 0$$

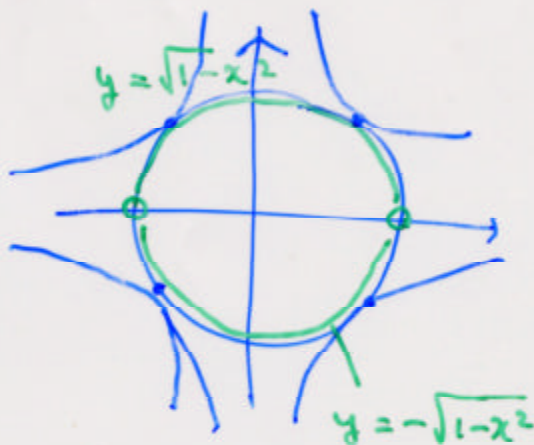
$$\Rightarrow F(c) : \text{极小值.}$$

Lagrange の不定乗数法

$$\begin{cases} g(x, y) = 0 \text{ かつ } v \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$z = f(x, y) = xy$$



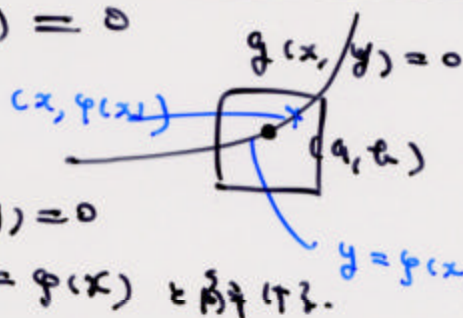
閉区間連続定理.

$$g(a, b) = 0$$

$$g_y(a, b) \neq 0$$

$$\Rightarrow (a, b) \text{ 附近 } g(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \varphi(x) \text{ となる.}$$



解法 I

$$\left. \begin{aligned} &(a, b) \text{ 附近 } (x, y) \text{ となる.} \\ &g_y(a, b) \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{ (仮定)}$$

$$F(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ となる.}$$

$$F'(a) = 0 \text{ となる.}$$

$$F(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \varphi'(t)$$

$$\leadsto f_x(a, b) + f_y(a, b) \varphi'(a) = 0$$

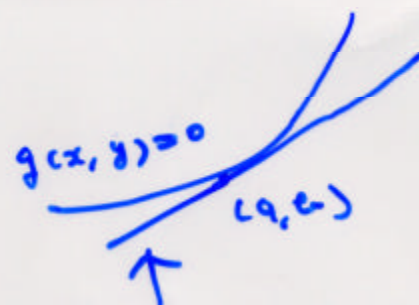
$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$F'(t) = f_x(\quad, \quad) \cdot x'(t) + f_y(\quad, \quad) y'(t)$$

$$g'(a) = ?$$

$$2 \text{ ① } y'' = \frac{dy}{dx} = 0$$

①



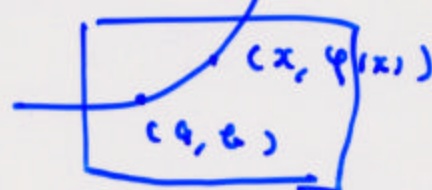
$$g_x(a, b)(x-a) + g_y(a, b)(y-b) = 0$$

この式を y について

$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x-a) + b$$

$$\rightarrow g'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

$$g(x, y) = 0$$



②

$$g(x, y(x)) \equiv 0$$

両辺を x について微分

$$g_x(x, y(x)) \cdot 1 + g_y(x, y(x)) y'(x) \equiv 0$$

$$y'(x) = -\frac{g_x(x, y(x))}{g_y(x, y(x))}$$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱ ⑲ ⑳ ㉑ ㉒ ㉓ ㉔ ㉕ ㉖ ㉗ ㉘ ㉙ ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ ㉞ ㉟ ㊱ ㊲ ㊳ ㊴ ㊵ ㊶ ㊷ ㊸ ㊹ ㊺ ㊻ ㊼ ㊽ ㊾ ㊿

$$① \quad g_x(a, b) + g_y(a, b) g'(a) = 0$$

$$② \quad g'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

② Σ ①: $f'_x = \lambda$.

$$f_x(q, u) - \frac{g_x}{g_y} f_y(q, u) = 0$$

" λ

~~$f_x(q, u) = \lambda g_x(q, u)$~~

③ $\begin{cases} f_x(q, u) = \lambda g_x(q, u) \\ f_y(q, u) = \lambda g_y(q, u) \end{cases}$

定理 $\Rightarrow$ Lagrange 乘数法

$z = f(x, y)$ subject to $g(x, y) = 0$

(q, u) : 停留点, $g_y(q, u) \neq 0$

$\Rightarrow$ ③ Σ 中 λ 存在

$\uparrow$ 乘数法

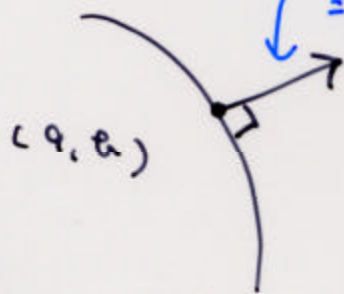
Lagrange's multiplier

$$\begin{pmatrix} f_x(q, u) \\ f_y(q, u) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x(q, u) \\ g_y(q, u) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 乘数法

$g(x, y) = 0$ 停留点

$f = f(q, u)$
 $g = 0$
 (q, u)



$f(x, y) = C = 0$

" $f(q, u)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(q, u) \\ &\quad \text{且} \\ g(x, y) &= 0 \text{ 中 } f \text{ 最大} \end{aligned}$$

①

1. テスト

$$f(x, y) = 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^2$$

$$x^2 + y^2 - 1$$

$$z = xy$$

1. 極値 (1) 求す。

②

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4y - 2$$

1. 極大・極小・鞍点

← 停留点

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \quad (x, y, \lambda)$$

$$\dot{F}(t) = f(t, \varphi(t))$$

$$F'(t) = 0 \text{ となる点}$$