

$A: 2 \times 2$ 正則行列

$$\begin{pmatrix} A\vec{x} = \vec{0} \\ \sum \text{ かつ } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ あり} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \det A = 0$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \lambda \vec{x} \quad // \lambda I_2 \vec{x} \\ \left(\sum \text{ かつ } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ あり} \right) &\Leftrightarrow \det(\lambda I_2 - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda I_2 - A)\vec{x} = \vec{0} \\ &\quad \sum \text{ かつ } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ あり} \end{aligned}$$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

固有方程式
解は固有値

固有値 $\lambda > 0$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n$$

$\vec{v}_j \in \mathbb{R}^m$



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= ad - bc \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

$|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad A \text{ 可逆}$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4月28日小テスト問題 (経済数学)

関数

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

の停留点を求めましょう。

$$z_x = 2x + y - 4 = 0, \quad z_y = x + 2y - 2 = 0$$

を解いて、停留点は

$$x = 2, y = 0$$

であることが分かる。

5月10日小テスト問題 (経済数学)

(I) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

対角化したい。つまり $A = A$

対角化しましょう。

まず A の固有値を求めます。そのために固有方程式

$$\begin{aligned} |\lambda I_2 - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 2) - (-2) \times (-2) \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0 \end{aligned}$$

を解くと、 $\lambda = 1, 6$ が固有値であることが分ります。それぞれの固有ベクトルを求めましょう。 $\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ですから、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

となります。

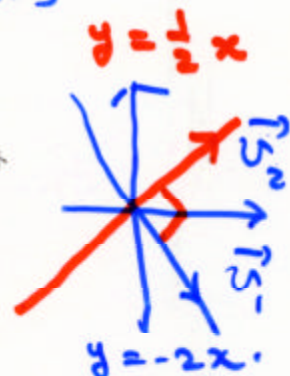
 $\lambda = 6$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

ですから、固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (y \neq 0)$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が直交します。これは A の対角化に必要です。



となります。

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$A\vec{v}_1 = \vec{v}_1, \quad A\vec{v}_2 = 6\vec{v}_2$$

から

$$AQ = A(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) = (A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \ 6\vec{v}_2) = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

から

$$AQ = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を得ます。さらに

$$\det(Q) = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 5 \neq 0 \quad \rightarrow Q \text{ は正則}$$

より Q は正則 です。このことから Q の逆行列を用いて

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Q^{-1} = \underbrace{AQ \cdot Q^{-1}}_{= I_2} = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

と A を対角化できます。

(参考問題) 微分方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = A\vec{v}(t)$$

を解きましょう。

ベクトル値の関数 $\vec{x}(t)$ を

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q^{-1} \vec{v}(t)$$

によって定義しましょう。この関数を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{x}(t) &= \frac{d}{dt} (Q^{-1} \vec{v}(t)) = Q^{-1} \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = Q^{-1} A \vec{v}(t) = Q^{-1} A Q Q^{-1} \vec{v}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Q^{-1} \vec{v}(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \vec{x}(t) \end{aligned}$$

より

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 6x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x_1'(t) = x_1(t), \quad x_2'(t) = 6x_2(t)$$

対角化すると何故分かるか

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

N.B.

Noter Bienen

$$A^2 = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{Q^{-1}Q}_{I_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

N.B. A, B, C . 2つの正定値行列

$$(AB)C = A(BC)$$

$$= Q \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

結合律

$$A^k = Q \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 6^k \end{pmatrix} Q^{-1}$$

微分方程式の準備

c : 定数

$$(e^{ct})' = e^{ct} \cdot c = \frac{d(e^{ct})}{dt}$$

$$g'(t) = c g(t) \text{ となることを示す}$$

$$(g(t)e^{-ct})' = g'(t)e^{-ct} + g(t)(-c)e^{-ct}$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Leibnizの公式

$$= c g(t) e^{-ct} + g(t) (-c) e^{-ct}$$

$$= g(t) e^{-ct} (c - c)$$

$$= 0$$

$$\frac{d}{dt} 1 = 0$$

$$f'(t) \equiv 0 \Rightarrow f(t) \equiv C \text{ 定数.}$$

証明 平均値の定理

$$f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_0 \cdot (b-a) = 0$$

$\exists$ かつ c 但し $a < c < b$ (仮定)

$$\leadsto f(b) = f(a)$$

$$g'(t) = C g(t) \text{ の下で}$$

$$(e^{-Ct} g(t))' \equiv 0$$

$$\leadsto e^{-Ct} g(t) \equiv g(0)$$

$$g(t) = g(0) e^{Ct}$$

微分方程式
の解

$$Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$A'(t) = \begin{pmatrix} a'(t) & c'(t) \\ b'(t) & d'(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} (A(t) \vec{v}(t)) = A'(t) \vec{v}(t) + A(t) \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$$

Leibniz

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$g'(t) = c g(t)$$

$$\leadsto g(t) = g(0) e^{ct}$$

が成立することが分かります。この方程式は各成分を用いて表示すると

$$x_1'(t) = x_1(t), \quad x_2'(t) = 6x_2(t)$$

となります。これから

$$x_1(t) = x_1(0)e^t, \quad x_2(t) = x_2(0)e^{6t}$$

が従い、

$$Q^{-1}\vec{v}(t) = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(0)e^t \\ x_2(0)e^{6t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

を得ます。この両辺に Q を左から掛けると

$$\vec{v}(t) = Q \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} Q^{-1}\vec{v}(0)$$

を得ます。

$$\vec{v}(t) = Q \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} Q^{-1}\vec{v}(0)$$

補足問題 (経済数学)

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

を直交行列で対角化しましょう。

(2) 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ の下で

$$z = x^2 + 4xy + 2y^2$$

の最小値、最大値を求めましょう。

ここで

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$$

と定めると

$$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

が成立しますから行列 P は直交行列です。この P を用いると

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (1 \cdot \vec{p}_1 \ 6\vec{p}_2) = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

すなわち

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$