

(1)

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

1/2 偏導 ($\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$) 2 条件

evaporate
vapor

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$(x, y) = (2, 0)$$

今個考 $z = z$:

$(2, 0)$ は 相対的 極小 の z 点 かな? →

補足 平面的 移動 座標 変換

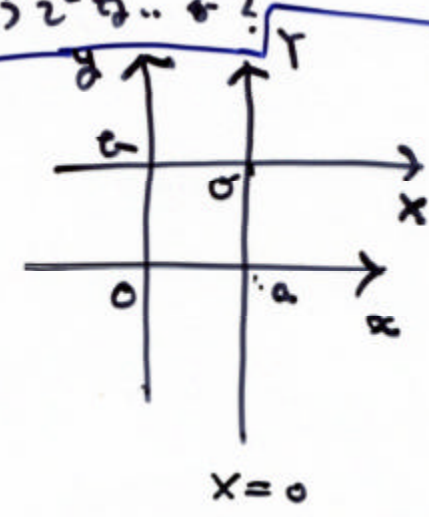
$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

2. z を 簡単 に する.

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

$$z = X^2 + XY + Y^2 + \tilde{C}$$

↑
定数



To be seen: $z = \alpha \xi^2 + \beta \eta^2 + C'$

座標 2 回 変換 する けれど

ξ, η : 両方 変換 「簡単 化」 の 目的 には 十分 である

(2)

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

$$= (x-a)^2 + (x-a)(y-b) + (y-b)^2 + c$$

x の偏微分, y の偏微分

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 2(x-a) + (y-b) \\ x + 2y - 2 = (x-a) + 2(y-b) \end{cases}$$

ゆえに x, y 成立す

$$\begin{cases} -4 = -2a - b \\ -2 = -a - 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \quad (a, b) = (2, 0)$$

$$4 + 2 \times 0 + 0^2 - 4 \times 2 - 2 \times 0 = c$$

$$(x=2, y=0) \text{ 代入 } c = -4$$

連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = d \quad \cdots \textcircled{1} \\ cx + dy = \beta \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(3)

$$\textcircled{1} \times d - \textcircled{2} \times b$$

$$(ad - bc)x = ad - \beta b$$

$$\textcircled{1} \times c - \textcircled{2} \times a$$

$$(bc - ad)y = \alpha c - \beta a$$

$$ad - bc \neq 0$$

$$x = \frac{ad - \beta b}{ad - bc}, \quad y = \frac{\beta a - dc}{ad - bc}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

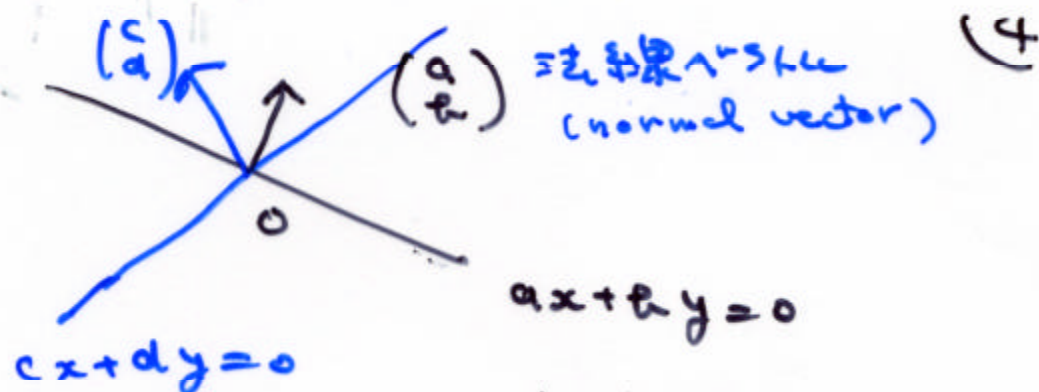
3x-12 1/2式

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & d \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

7.4.7 $\alpha = \beta = 0$

$$ad - bc \neq 0$$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0$$



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ならば}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

定理

$$ad - bc = 0$$

$(0, 0)$ 自明解

$$(*) \begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \text{ 非自明解.}$$

$\therefore \boxed{(x, y) \neq (0, 0)}$ の解が存在する。

(証明) 定理より $ad - bc \neq 0$.

i) $(x, y) = (d, -c)$ は解.

ii) $(x, y) = (b, -a)$ は解.

i) または ii) の解が 非自明解 なる。

証明終わり

otherwise
Since

i) と ii) の解が 自明解 $(\Leftrightarrow a=b=c=d=0)$

全 2 の $(x, y) \neq (0, 0)$ の解



$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(5)

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\alpha+b\beta & a\gamma+b\delta \\ c\alpha+d\beta & c\gamma+d\delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

定理 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad |A| = ad - bc$

$$|A| = 0 \text{ とする}$$

~~証明~~

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

つまり $\vec{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が存在する。

$$|A| = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{存在する. (B. Russell)} \\ \exists \vec{x} \neq \vec{0} \\ A\vec{x} = \vec{0} \end{matrix}$$

← (逆)

(逆) 証明. 3. 逆の証明は、このようにして証明できる。

$$|A| \neq 0 \Rightarrow (A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$$

これは、逆の証明である。

$$(P \Rightarrow Q)$$

$$\equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

↑
P, Q が 0, 1 のとき
真偽の表を調べれば
2つの命題が真偽一致

(6)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

 λ lambda

「 $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ 」を満たす $\vec{x} \neq \vec{0}$ が存在する、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x + y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2-\lambda)x + y \\ 2x + (3-\lambda)y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 単位行列}$$

$$I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda I_2) \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow |A - \lambda I_2| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 1)$$

満たす

$$\lambda = 1, \lambda = 4$$

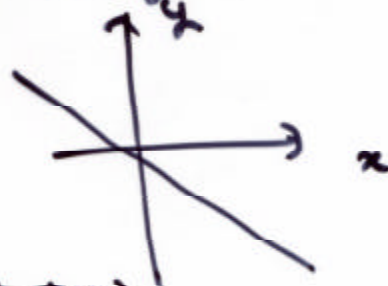


$$\underline{\lambda = 1}$$

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow x+y=0$$

$$\begin{pmatrix} x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

$$\underline{\lambda = 4}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2x - y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

$\lambda = 1, 4$ 固有値 eigenvalue
 $t = 1, i, \dots$

eigentlich = original?

proprie (in)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル

何に使うのか, = 9 年内の増減を調べる

テスト

(8)

① $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ について

固有値, 固有ベクトル
を求めよ.

②

$$z = x^3 + y^3 + 6xy$$

の停留点を求めよ.
