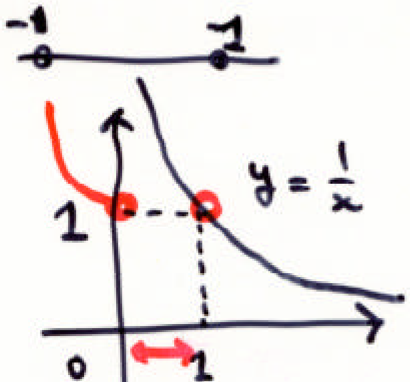
$$\boxed{|r|<1 \text{ のとき } \quad r^n \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)}$$

(証明)



0 < r < 1 のとき

$$R = \frac{1}{r} > 1$$

$$=(1+\theta) \rightsquigarrow \text{このとき } \theta > 0.$$

$$R^n = (1+\theta)^n = \boxed{1} + n\theta + \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}\theta^2 + \cdots + \theta^n$$

2項定理

$1 > 0$, $n = {}_nC_1$, $\frac{n(n-1)}{2} = {}_nC_2$, $\theta^n > 0$

$$> n\theta$$

$${}_nC_k\,\theta^k > 0 \quad (\theta > 0 \text{ だから})$$

まとめ　$R^n = \frac{1}{r^n} > n\theta$

$$0 < r^n < \boxed{\frac{1}{\theta} \times \frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{\theta} \times 0 = 0$$

$0 \longleftarrow 0$

$\downarrow 0 \quad (n \to +\infty)$

はさみうち
$a_n \longrightarrow \alpha,\ b_n \longrightarrow \alpha$
$a_n \le c_n \le b_n$ (すべての n)
$\Rightarrow c_n \longrightarrow \alpha$

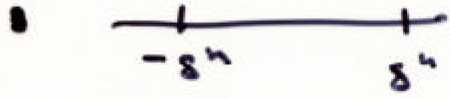
$r=0$ 　　$r^n = 0 \longrightarrow 0$

$-1<r<0$ のとき. 　$s=|r|$ とおく $\boxed{0<\underset{s}{\cancel{\quad}}<1}$

$r^n \to 0$ by はさみうち

$-s^n \leqq r^n \leqq s^n$

$-s^n \to (-1)\times 0 = 0$, 　$s^n \to 0$



$|r|<1$ とする.

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$
$$-)\ rS_n = \quad r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$
$$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}$$
$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r}\times \underset{\to 0}{r^n}$$
$$\longrightarrow \frac{1}{1-r}$$

まとめ 　$|r|<1$ のとき.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

「銀行の信用創造」

準備金比率 x　　$0<x<1$.

d の預金が入った.

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow & xd \ \text{準備金} \\
d & & \\
 & \searrow & (1-x)d \ \text{貸し出し.}
\end{array}
$$

還流

$$
\begin{array}{lll}
 & \nearrow & x(1-x)d \ \text{準備金} \\
(1-x)d & & \\
 & \searrow & (1-x)^2 d \ \text{貸し出し}
\end{array}
$$

....

貸し出しの総額.

$$
\begin{aligned}
& (1-x)d + (1-x)^2 d + (1-x)^3 d + \cdots \\
&= (1-x)d \{ 1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots \} \\
&= (1-x)d \times \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{(1-x)d}{x}
\end{aligned}
$$

信用創造.

課題　$|r|<1$ のとき

$$nr^n \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$$

次回示す.

幾何分布.　$|r|<1$

$$r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots = ?$$

次回

$\mathbb{R}^2$: 平面.

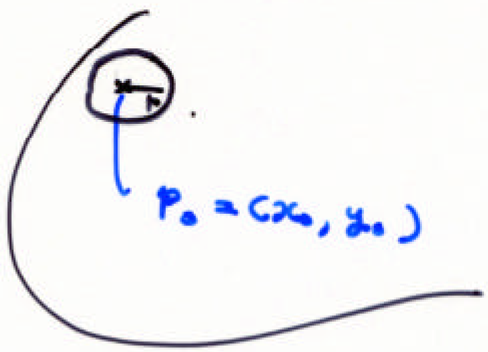
$$U \subset \mathbb{R}^2$$

部分集合. subset

U is a subset of $\mathbb{R}^2$.
U is included in $\mathbb{R}^2$. ...

U が開集合とは

U の各点 $P_0 = (x_0, y_0)$
の周りが U に含まれる.

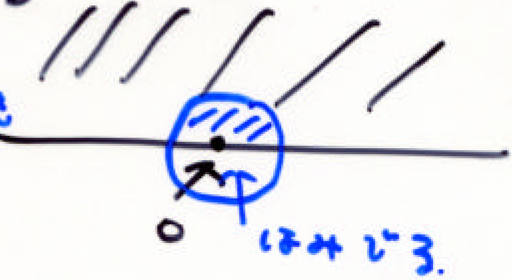


$$\boxed{B_r(P_0)} \subset U$$

である $r>0$ がある.

$$B_r(P_0) = \{(x,y);\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$$

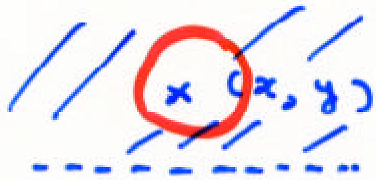
例　$H=\{(x,y);\ y\geq 0\}$　開でない



$r>0$ をいかなるものをとっても

$H \not\supset B_r(0)$

$F=\{(x,y);\ y>0\}$



$(x,y)\in F$ とする

$r=\frac{y}{2}>0$ とすると

$B_r(x,y)\subset F$

F: 開

open.

復習

$f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{R}$.

定義域　　値域

開区間

$c\in(a,b)$ が f の極大点（小）

小さな $\delta>0$ に対して

$f(t)\geq f(c)$　$(\leq)$　$t\in(c-\delta,c+\delta)$

定理　$t=c\in(a,b)$ が f の極大点（極小点）

$\Rightarrow f'(c)=0$

$U \subset \mathbb{R}^2$ 開集合.

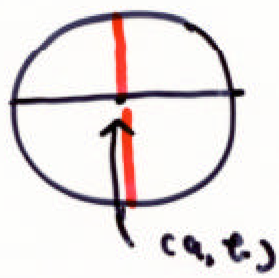
$f: U \longrightarrow \mathbb{R}.$

$(a,b) \in U$ が f の 極小 (大) とは

$$f(a,b) \leq (\geq)\ f(x,y)$$

$$\left((x,y) \in B_r(a,b) \right)$$

$\rightsquigarrow$ $F(x) = f(x,b)$ は $x=a$ で 極小 (大)



$G(y) = f(a,y)$ は $y=b$ で 極小 (大)

$\rightsquigarrow$ $F'(a)=0$, $G'(b)=0$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

定理 $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ が $(a,b) \in U$ で 極小 (または 極大)

$$\Longrightarrow \underbrace{f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0}_{\text{停留点}}$$

(8

7/12 文学

$$z = x^3 + y^3 + 6xy$$

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 6y = 0 \\ z_y = 3y^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 2y = 0$　　$y = -\dfrac{x^2}{2}$ を代入

$y^2 + 2x = 0$　　$\dfrac{x^4}{4} + 2x = 0$

$$x^4 + 8x = 0$$

$$x(x^3 + 8) = 0$$

$$x(x+2)(\overline{x^2 - 2x + 4}) = 0$$

$$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$$

$\rightarrow$ $x = 0, -2.$

$y = -\dfrac{x^2}{2}$ に代入して　$y = 0, -2.$

$(0, 0), (-2, -2)$ が停留点

小テスト

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2$$

の停留点を求めよ.

次回は、停留点が極大・極小の十分条件について説明する。