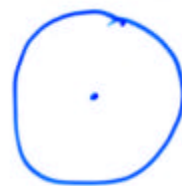


微分積分

7月6日小テスト

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \dots (0)$$



かつ

$$z = f(x, y) = xy$$

の極値(制約)問題と考える

$$f_x = y, f_y = x, g_x = 2x, g_y = 2y$$

より

$$\begin{cases} y = \lambda \cdot 2x & \dots (1) \\ x = \lambda \cdot 2y & \dots (2) \end{cases}$$

①と②に代入すると

代入すると
得られる。

$$x = 4\lambda^2 x \Leftrightarrow x = 0 \text{ OR } \lambda^2 = \frac{1}{4}$$

と得る。 $x = 0$ とすると ①より $y = 0$ と得るが、

$x = y = 0$ は ①と②を満たす。 $x \neq 0$ と仮定して

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} \quad \text{より} \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

が成立する。

(I) $\lambda = \frac{1}{2}$ のとき ①より $x = y$ と得る。

$$\textcircled{2} \text{ により } \lambda = \frac{1}{2} \quad x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{と得る。}$$

(II) $\lambda = -\frac{1}{2}$ のとき ①より $x = -y$ と得る。

$$\textcircled{2} \text{ により } \lambda = -\frac{1}{2} \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{符号が異なる})$$

$$g(x, y) = 0 \text{ a 下 } z$$

$$z = f(x, y)$$

g 下 1 下 2 下 3

(a, b) 下 1 下 2 下 3

Lagrange 下 1 下 2 下 3

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda g_x(a, b) = f_x(a, b) \\ \lambda g_y(a, b) = f_y(a, b) \\ g(a, b) = 0 \end{cases}$$

$g = 0$ 下

$f(x, y) =$

$f(a, b)$ 下

下 1 下 2 下 3

下 1 下 2 下 3 下 4

$$g = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$z = xy$$

$$\lambda \nabla(g)(a, b)$$

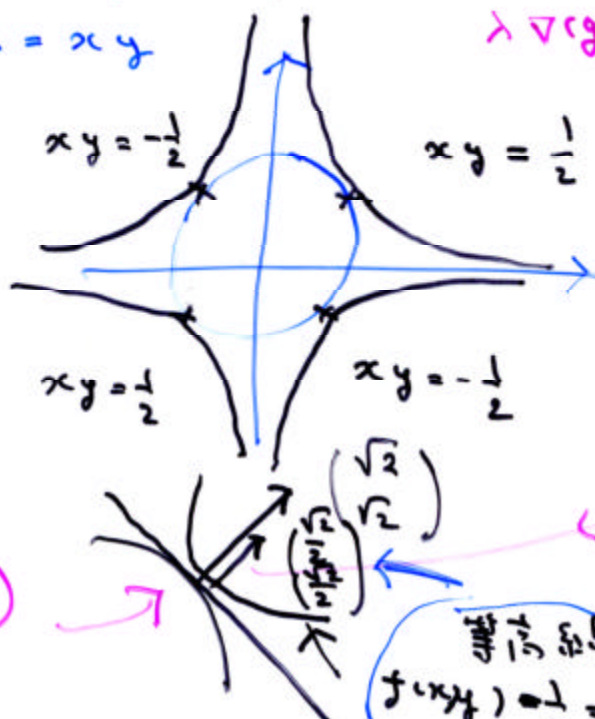
$$= \nabla(f)(a, b)$$

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

"

$$\nabla(g) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla(f) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2} = 0$$



$$g(x, y) = 0$$

$$f(x, y) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 下 1 下 2 下 3}$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2$$

III. $g(x, y) = 0$ 的下方 $z = x^2 + y^2$ 的 $\frac{1}{5}$ 留点 Σ 求之.

(x, y) 的 $\frac{1}{5}$ 留点 求之

$$\begin{cases} 2x = (8x - 4y - 1)\lambda \end{cases} \quad \text{--- (1)}$$

$$\begin{cases} 2y = (-4x + 2y - 2)\lambda \end{cases} \quad \text{--- (2)}$$

Σ 满足 T 的 λ 的 存在性. λ 无解

$$\textcircled{1} \times (-4x + 2y - 2) - \textcircled{2} \times (8x - 4y - 1)$$

Σ 上 算得

$$0 = 2x(-4x + 2y - 2) - 2y(8x - 4y - 1)$$

$$= 2(-4x^2 + 2xy - 2x - 8xy + 4y^2 + y)$$

$$= 2(-4x^2 - 6xy - 2x + 4y^2 + y)$$

$$= -2 \{ 4x^2 + (6y + 2)x - y(4y + 1) \}$$

$$= -2(2x - y)(2x + 4y + 1)$$

上式 $y = 2x$ 时 $T = 2x + 4y + 1 = 0$ 的 根 无.

① $y = 2x$ 代入 $g(x, y) = 0$ 得 $4x^2 - 8x^2 + 4x^2 - x - 4x + 2 = 0$

$$4x^2 - 8x^2 + 4x^2 - x - 4x + 2 = 0$$

$$5x = 2$$

$$\Sigma \text{ 上 } x = \frac{2}{5} \quad \text{且 } y = \frac{4}{5}, \lambda = 0$$

② $x + 2y = -\frac{1}{2}$ 即 $x = -2y - \frac{1}{2}$ 代入 $g(x, y) = 0$ 得

$$(2x - y)^2 + \frac{1}{2} + 2 = (2x - y)^2 + \frac{5}{2} > 0$$

所以 解 不存在.

$$4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2 = (2x - y)^2 + \frac{1}{2} + 2 > 0$$

实数解 无.

239 page 434 8.24

$$g(x, y) = x + y - 9 = 0 \quad \text{--- (0)}$$

$$z = f(x, y) = x^2 y$$

$$\begin{cases} 2xy = \lambda \cdot 1 & \text{--- (1)} \\ x^2 = \lambda \cdot 1 & \text{--- (2)} \end{cases}$$

①, ② $\Rightarrow \lambda \neq 0$

$$2xy = x^2 \Leftrightarrow x=0 \text{ OR } x=2y.$$

(i) $x=0$ a.e. ① $\Rightarrow$ s.t. $y=9$

①, ② $\Rightarrow x=0, y=9$ s.t. λ s.t.

$$\begin{cases} 0 = \lambda \\ 0 = \lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = 0$

i.e. id est.

that is

c'est à dire que

(ii) $x=2y$ a.e. ① $\Rightarrow$ s.t. λ s.t.

$$2y + y - 9 = 0 \quad \text{i.e. } y=3$$

$\Rightarrow$ a.e. $x=6$. ①, ② $\Rightarrow$ s.t. λ s.t.

$$\begin{cases} 36 = \lambda \\ 36 = \lambda \end{cases} \quad \text{so } \lambda = 36.$$

$$g(x, y) = x + y - 4 = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$$

$$g_x = g_y = 1, \quad f_x = 3x^2 + y$$

$$f_y = 3y^2 + x$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = \lambda \cdot 1 & \text{--- ①} \\ 3y^2 + x = \lambda \cdot 1 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②}$$

$$3(x^2 - y^2) + (y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y \quad \text{OR} \quad x + y = \frac{1}{3}$$

$$(i) \quad x + y = \frac{1}{3} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{①} \quad \lambda = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad t = \pi \text{ or } \dots$$

$$(ii) \quad x = y \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{②} \quad \lambda = 5\sqrt{2} \quad x = y = 2$$

$$\text{①}, \text{②} \quad \lambda = 5\sqrt{2}$$

$$14 = \lambda$$

$$\lambda = \frac{10}{3}$$

$$g(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2 = 0$$

由题知 $(a, b) = (1, 1)$

$$y = g(x) \in \mathbb{R} \quad \tau_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{由题知 } g_y(a, b) \neq 0 \quad \text{由隐函数定理}$$

$$g_y = \frac{\partial}{\partial y} (4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2) = -4x + 2y - 2$$

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t)$$

$$g = 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$f = x^2 y$$

$$g_x = 4x, \quad g_y = 2y, \quad f_x = 2xy, \quad f_y = x^2$$

$$\begin{cases} 2xy = \lambda \cdot 4x & \dots ② \\ x^2 = \lambda \cdot 2y & \dots ③ \end{cases}$$

$$2xy - 2y - 4x \cdot x^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{E.P.S} \quad & 4xy^2 - 4x^3 \\ & = 4x(y^2 - x^2) \\ & = 4x(y-x)(y+x) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x=0 \quad \text{OR} \quad y=x \quad \text{OR} \quad y=-x$$

$$\text{①} \quad x=0 \quad \text{a.e.} \quad \text{① \& ③} \quad y = \pm 1. \quad \text{a.e.} \quad \text{②, ③/2}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 \\ 0 = \pm 2 \cdot \lambda \end{cases} \quad \leadsto \lambda = 0 \quad \text{ok.}$$

$$\text{②} \quad y=x. \quad \text{a.e.} \quad \text{① \& ③} \quad 3y^2 = 1, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$x = y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{a.e.} \quad \text{②, ③} \quad \text{a.e.} \quad \text{① \& ③}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} \lambda \\ \frac{1}{3} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \lambda \end{cases} \quad \leadsto \lambda = \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{③} \quad y = -x \quad \text{a.e.} \quad \text{① \& ③} \quad 3y^2 = 1 \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{a.e.} \quad x = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3} \lambda \\ \frac{1}{3} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \lambda \end{cases} \quad \leadsto \lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

a.e.

微分積分演習.

$$g(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2$$

(I) $g(x, y)$ の 1/2 階点 Σ 点 $\{$

$$\begin{cases} g_x = 8x - 4y - 1 = 0 \\ g_y = -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 点 Σ 点 $\{ (x, y) \}$ は存在しない。 Silence!

(II) $g(x, y) = 0$ の 1/2 階点 $y = g(x)$ とする。

$g' \Sigma x \in \mathbb{R}^2, g'' \Sigma x, g, g' \Sigma$ 表す。

$$4x^2 - 4xg(x) + g(x)^2 - x - 2g(x) - 2 \equiv 0$$

の両辺 Σx について微分して

$$8x - 4g - 4xg' + 2gg' - 1 - 2g' = 0 \quad \text{--- } \textcircled{\#}$$

から

$$(4x - 2g + 2)g' = 8x - 4g - 1$$

を整理して

$$g' = \frac{8x - 4g - 1}{4x - 2g + 2}$$

$\textcircled{\#} \Sigma$ 点 Σ 点 $\{ (x, y) \}$

$$8 - 4g' - 4g' - 4xg'' + 2(g')^2 + 2gg'' - 2g'' = 0$$

Σ 整理して

$$(4x - 2g + 2)g'' = 8 - 8g' + 2(g')^2$$

から

$$g'' = \frac{8 - 8g' + 2(g')^2}{4x - 2g + 2}$$

$F(t) = f(x(t), y(t))$

$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t)$

$+ f_y(x(t), y(t))y'(t)$

$$g(x, y(x)) \equiv 0 \quad \left| \quad g = 4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2y + 2 \right.$$

$x \in \mathbb{R}$

$$g_x(x, y(x)) \cdot 1 + g_y(x, y(x)) \cdot y'(x) \equiv 0$$

$$y' = - \frac{g_x(x, y(x))}{g_y(x, y(x))} \quad \left| \quad \begin{array}{l} g_x = 8x - 4y - 1 \\ g_y = -4x + 2y - 2 \end{array} \right.$$

$$= - \frac{8x - 4y - 1}{-4x + 2y - 2} = \frac{8x - 4y - 1}{4x - 2y + 2}$$

$$\begin{aligned} (g_x)_y &= g_{xy} \\ (g_y)_x &= g_{yx} \end{aligned}$$

$$g_{xx} \cdot 1 + g_{xy} \cdot y' +$$

$$y' (g_{yx} \cdot 1 + g_{yy} \cdot y') + g_y y'' \equiv 0$$

$$g_{xx} + 2g_{xy} y' + g_{yy} (y')^2 + g_y y'' \equiv 0$$

$$\leadsto y'' = - \frac{g_{xx} + 2g_{xy} y' + g_{yy} (y')^2}{g_y}$$

$$\begin{aligned} g_{xx} &= 8, \quad g_{xy} = g_{yx} = -4 \\ g_{yy} &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \frac{8 - 8y' + 2(y')^2}{4x - 2y + 2} \\ &= \frac{8 - 8y' + 2(y')^2}{4x - 2y + 2} \end{aligned}$$

定理 (Taylor's theorem)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

- 余项 (remainder term)

$$\dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

存在 ξ 在 a 与 x 之间

$$f(x) = e^x \quad a=0 \quad x=t$$

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f^{(k)}(0) = 1$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \frac{e^c}{(n+1)!}t^{n+1}$$

存在 ξ 在 0 与 t 之间

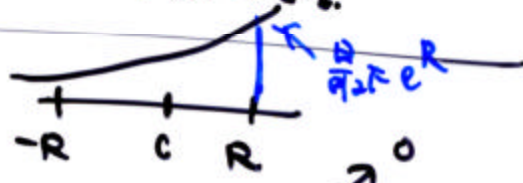
$$|t| \leq R$$

$$e^c \leq e^R$$

$$0 \leq \left| \frac{e^c}{(n+1)!}t^{n+1} \right| \leq \frac{e^R}{(n+1)!}R^{n+1}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}t^n$$



$$R^{n+1} = e^R \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

余项 $\rightarrow 0$

$$0! = 1$$

Poisson's formula

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \text{ かつ } v$$

$$z = f(x, y) = xy$$

9 1/2 4/5 5/2 7/11
