

微分積分6月30日

(I) 関数

$$z = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$$

の停留点を求めましょう。

$$z_x = z_y = 0 \quad \frac{\partial (x-y)^2}{\partial y} = 2(x-y) \times (-1)$$

$$\frac{\partial (x-y)^2}{\partial x} = 2(x-y) \cdot 1$$

まず z の偏導関数を計算すると

$$\begin{cases} z_x = 4x^3 - 8(x-y) = 0 \cdots (1) \\ z_y = 4y^3 + 8(x-y) = 0 \cdots (2) \end{cases}$$

を満たす (x, y) を求めることになります。(1)+(2) から $x^3 + y^3 = 0$ が必要になりますが、

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x+y)\left\{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right\} = 0 \end{aligned}$$

から $x+y=0$ または $x=y=0$ が必要となります。

$$x^3 + y^3 = 0 \Leftrightarrow x+y=0 \text{ OR } \boxed{x^2 - xy + y^2 = 0}$$

(i) $x+y=0$ のとき $x=-y$ を (1) に代入すると

$$\begin{aligned} x^3 - 4x &= 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 0, \pm 2 \\ &= x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

となりますが、これから得られる

$$(x, y) = (0, 0), (2, -2), (-2, 2)$$

$$(I) \quad \exists + = \vdash$$

$$x^3 + y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 0 \quad \text{OR}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 0$$

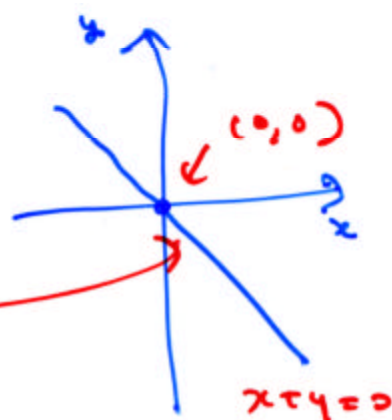
$$\Leftrightarrow x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{2} \text{ and } y = 0$$

$$\Rightarrow x = y = 0$$

$$\Downarrow \\ x + y = 0$$



(II) Review

$$z = f(x, y) \quad \text{at } (a, b, f(a, b))$$

is the tangent plane

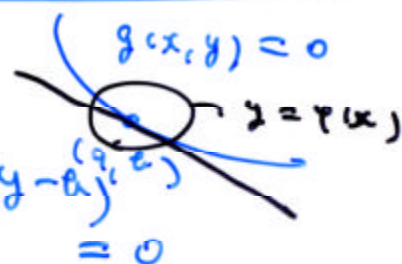
$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

(III) (a, b) is the point of tangency

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) = 0$$

$$f_y(a, b) \neq 0 \text{ and } z =$$

$$y = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}(x - a) + b$$



$$\Rightarrow g'(a) = -\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}$$

は(1)と(2)を満たします。

(ii) $x = y = 0$ の場合は、(i)に含まれます。

(II) 関数

$$z = xe^{x+y}$$

の(0,0)における接平面を求めましょう。

関数 z の偏導関数を求めると

$$z_x = e^{x+y} + xe^{x+y} = (1+x)e^{x+y}, \quad z_y = xe^{x+y}$$

となります。(0,0)において

$$z_x(0,0) = 1, \quad z_y(0,0) = 0$$

を得ます。これから、求める接平面は

$$z = 1(x-0) + 0(y-0) + 0$$
$$z = 1 \cdot x$$

となります。

$z = f(x, y)$ の $(a, b, f(a, b))$ における接平面

$$z = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + f(a, b)$$

(III) 曲線

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

の(1,2)における接線を求めましょう。

$$g_x(a, b)(x-a) + g_y(a, b)(y-b) = 0$$
$$y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x-a) + b \rightarrow g'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

関数 g の偏導関数を求めると

$$g_x = 2x - y, \quad g_y = -x + 2y$$

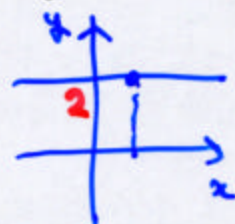
となり $(1, 2)$ における偏微分係数は

$$g_x = 0, \quad g_y = 3$$

と計算されます。これから、求める接線の方程式は

$$0 \cdot (x - 1) + 3(y - 2) = 0 \text{ すなわち } y = 2$$

となります。



(補足) 一般に曲線

$$g(x, y) = 0$$

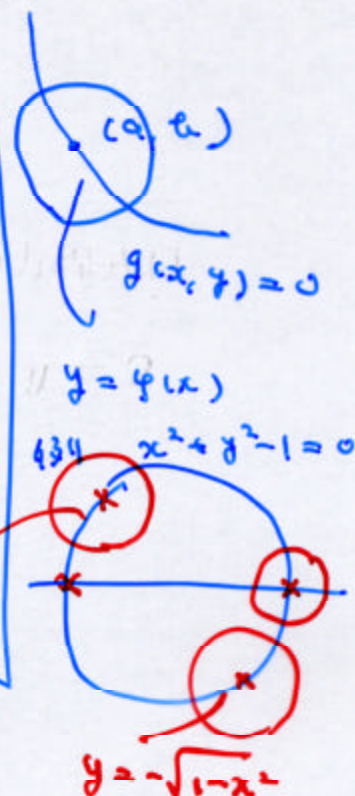
上の点 (a, b) の近くで

$$y = \varphi(x)$$

と解ける十分条件として

$$g_y(a, b) \neq 0$$

があります (陰関数定理)。



$$g_y = 2y = 0$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

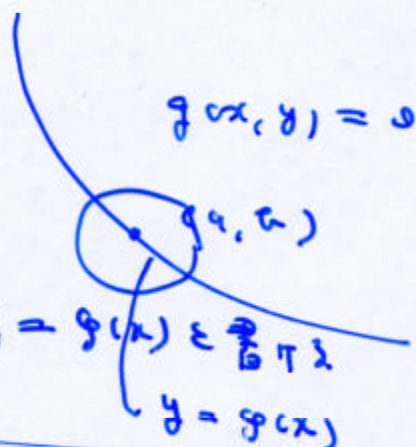
$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$g_y(a, b) \neq 0$$

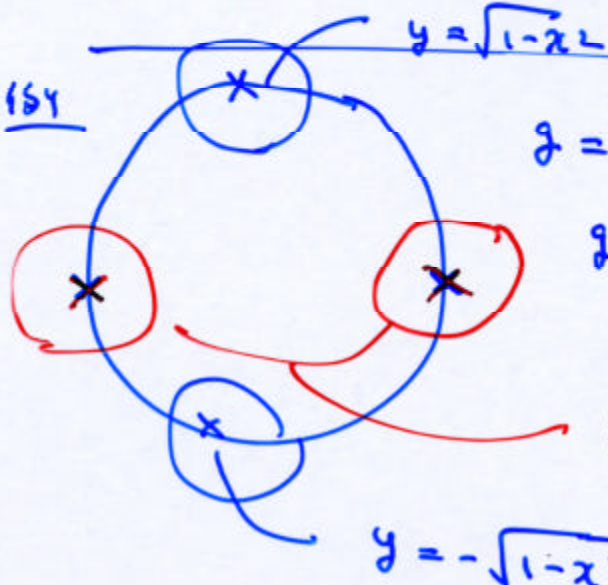


$(a, b) \in \mathbb{C}^2$

由系果 (2) $y = g(x) \in \mathbb{C} \cap \mathbb{R}$



154



$$g = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g_y = 2y = 0 \quad \text{这时}$$

定理12 仍适用

$y = g(x)$ 由系果 (2) 可得

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$g = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

$$y^2 - xy + (x^2 - 3) = 0$$

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 3)}}{2}$$

$$= \frac{x \pm \sqrt{3(4 - x^2)}}{2}$$

$$= \frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4 - x^2}$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$g = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

上の例で、この陰関数定理が使えない点を求めましょう。そのためには

$$g_y = -x + 2y = 0$$

$$g = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

を満たす (x, y) を求めます。

$$\varphi''(-1) = \frac{2}{3} > 0$$

$$y^2 - xy + x^2 - 3 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{x^2 - 4(x^2 - 3)}}{2}$$

そのために $x = 2y$ を $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$ に代入すると

$$4y^2 - 2y^2 + y^2 - 3 = 0 \text{ すなわち } y^2 = 1$$

から $y = \pm 1$ を得ます。これから

$$(x, y) = (2, 1), (-2, -1)$$

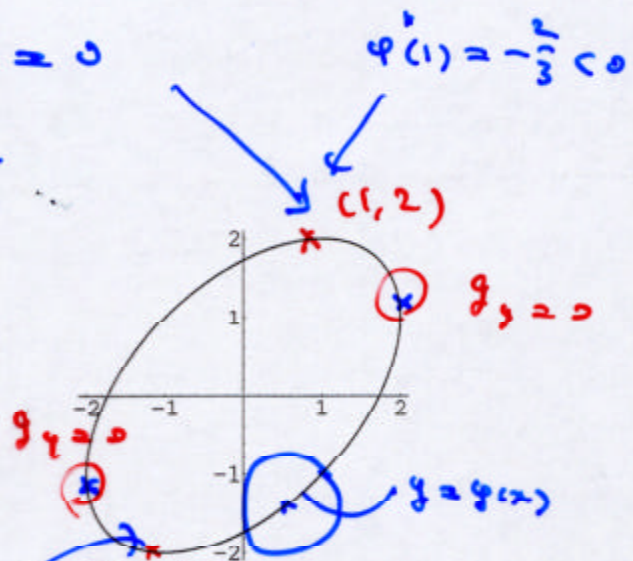
が求める点となります。

この2点を除いて、曲線上の任意の点 (a, b) の近くで

$$y = \varphi(x)$$

と解けることが分かります。この関数 $\varphi(x)$ が $x = a$ で極値をとる場合を求めてみましょう。そのためには

$$g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0, \quad \varphi'(x) = 0$$



$$\begin{cases} g = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ \varphi'(x) = 0 \quad \pm 1 \pm 2 \quad (x, y) \end{cases}$$

を満たす (x, y) を求めることになります。

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x, y)}{g_y(x, y)} = -\frac{2x - y}{-x + 2y} = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0 \quad (3)$$

に注意しましょう。すると $y = 2x$ を $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$ に代入すると

$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3 \quad \text{すなわち} \quad x^2 = 1$$

から $x = \pm 1$ を得ます。従って $(a, b) = (1, 2), (-1, -2)$ の2点が停留点となることが分かります。

定理 $g'(a) = 0, g''(a) > 0 \rightarrow g(a)$ 極小値.

さらに $\varphi''(\pm 1)$ を求めましょう。後に、別の方法を教えますが、ここでは簡単な方法を教えます。 $(x, \varphi(x))$ が曲線上にありますから

$$x^2 - x\varphi(x) + \varphi(x)^2 - 3 = 0$$

が成立します。この両辺を x で微分すると

$$2x - \varphi - x\varphi' + 2\varphi\varphi' = 0 \quad (4)$$

が常に成立します。これからも(3)と同じことを意味する

$$\varphi'(x) = -\frac{2x - \varphi(x)}{-x + 2\varphi(x)}$$

を得ることに注意しましょう。さらに(4)を x で微分すると

$$2 - \varphi' - \varphi' - x\varphi'' + 2(\varphi')^2 + 2\varphi\varphi'' = 0$$

から $\varphi''(x-2\varphi) = 2 - 2\varphi' + 2(\varphi')^2$

$$\varphi'' = \frac{2 - 2\varphi' + 2(\varphi')^2}{x - 2\varphi}$$

を得ます。これに $x = \pm 1, \varphi(\pm 1) = \pm 2, \varphi'(\pm 1) = 0$ を代入すると

$$\varphi''(\pm 1) = \mp \frac{2}{3}$$

$$\varphi''(1) = -\frac{2}{3} < 0$$

と計算されます。これから $(x, y) = (1, 2)$ において極大、 $(x, y) = (-1, -2)$ において極小であることが従います。

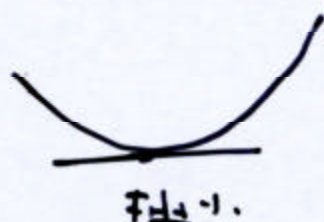
$$\varphi''(-1) = \frac{2}{3} > 0$$

$\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($\varphi, \varphi', \varphi''$: 函数)

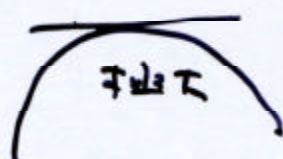
定理 $\varphi'(a) = 0, \varphi''(a) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \varphi(a)$: 局部
极值

$\varphi'' > 0$



$\varphi'' < 0$



曲线系 γ 在 $x-t$ 表示.

$(x(t), y(t))$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$



$$x(0) = a, y(0) = t$$

$t=0$ 是 x, y 的驻点

$$\frac{F(t) - F(0)}{t - 0} \Rightarrow ?$$

$$F(0) = f(x(0), y(0)) = f(a, t)$$

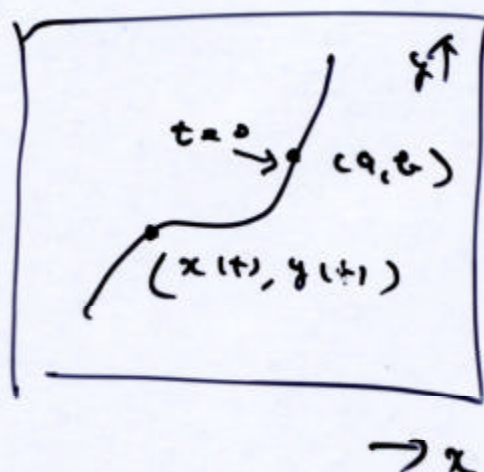
$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$\approx f_x(a, t)(x(t) - \overbrace{x(0)}^a) + f_y(a, t)(y(t) - y(0))$$

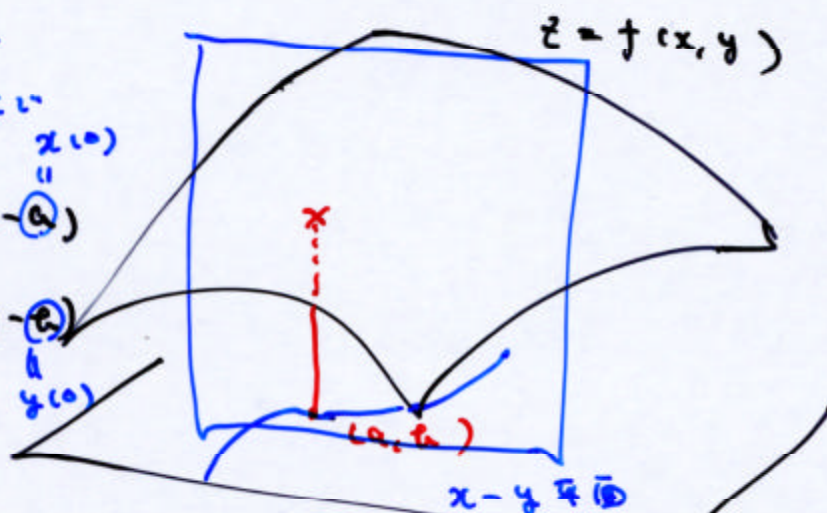
问题

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$F'(t) = ?$$



$f(x, y)$ 在 (a, b) 附近
 $f(x, y) \approx f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$



$$\frac{F(t+1) - F(t)}{t - 0} \approx \frac{f_x(a, b)(x(t+1) - x(t)) + f_y(a, b)(y(t+1) - y(t))}{t}$$

$$x(0) = a, y(0) = b$$

$$F(0) = f(a, b)$$

$$= f_x(a, b) \frac{x(t+1) - x(t)}{t - 0} + f_y(a, b) \frac{y(t+1) - y(t)}{t - 0}$$

$$\rightarrow f_x(a, b) x'(0) + f_y(a, b) y'(0)$$

$$F'(0) = f_x(a, b) x'(0) + f_y(a, b) y'(0)$$

chain rule 链公式

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t)) x'(t) + f_y(x(t), y(t)) y'(t)$$

$$z = f(x, y) = f(x(t), y(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

例 (7) 235 page.

$$g(x, y) = 0 \text{ 且 } z(x, y) \text{ 有}$$

$$z_0 \in \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y)$$

求 z 关于 x, y 的偏导数。

$$g(x, y) = 0$$

$$例 1) \quad g = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$z = f(x, y) = xy$$

求 z 关于 x, y 的偏导数。



$$g(x, y) = 0 \text{ 且 } z$$

$$z = f(x, y)$$

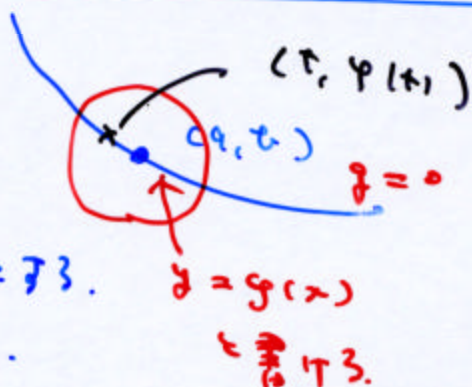
求 z 关于 x, y 的偏导数。

$$\bullet (a, b) \text{ 满足 } g(a, b) = 0 \text{ 且 } z(a, b) = z_0$$

$$\bullet g_y(a, b) \neq 0 \text{ 且 } z_0 \in \mathbb{R}$$

链式法则

隐函数定理



3 PC

$$F(t) = f(t, \varphi(t))$$

$$\boxed{F'(a) = 0} \leftarrow (a, t) \text{ is fixed}$$

$$F'(t) = ?$$

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$t = a \text{ is } 0$$

$$F'(a) = f_x(a, t) + f_y(a, t) \varphi'(a) = 0$$

$$\text{to } \nabla g(t, \varphi(t)) \equiv 0$$

$$t \text{ is fixed}$$

$$g_x(t, \varphi(t)) \cdot 1 + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0$$

$$t = a \text{ is } 0$$

$$g_x(a, t) + g_y(a, t) \varphi'(a) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(a) = - \frac{g_x(a, t)}{g_y(a, t)}}$$

$$= -\varphi'(a)$$

$$f_x(a, t) - f_y(a, t) \left[\frac{g_x(a, t)}{g_y(a, t)} \right] = 0$$

$$\lambda = \frac{f_y(a, t)}{g_y(a, t)} \text{ is } \lambda$$

$$\begin{cases} f_x(a, t) = \lambda g_x(a, t) \\ f_y(a, t) = \lambda g_y(a, t) \end{cases}$$

λ : Lagrange multiplier
Lagrange's multiplier

$$F(t) = f(t, g(t))$$

(449)

$$F'(t) = f_x(t, g(t)) \cdot 1 + f_y(t, g(t)) g'(t)$$

$$(a, g(a)) = (a, t)$$

$$0 = F'(a) = f_x(a, t) + f_y(a, t) \boxed{g'(a)} = 0$$

$$\boxed{g'(a) = - \frac{f_x(a, t)}{f_y(a, t)}}$$

(t, λ)

(t, g(t))

11.7 定理 2. $g(t, g(t)) \equiv 0$

$$g(x, y) \equiv 0$$

$$f_x(t, g(t)) \cdot 1 + f_y(t, g(t)) g'(t) \equiv 0$$

$$t = a \quad \Sigma (t, \lambda)$$

$$f_x(a, t) + \underbrace{f_y(a, t)}_{\neq 0 \text{ 固定}} g'(a) = 0$$

$$\rightarrow g'(a) = - \frac{f_x(a, t)}{f_y(a, t)}$$

$$f_x(a, t) - \boxed{\frac{f_y(a, t)}{f_y(a, t)}} f_x(a, t) = 0$$

$$\lambda = \frac{f_y(a, t)}{f_y(a, t)} \in \mathbb{R}$$

Ex 11 $g(x, y) = 0$ and

$z = f(x, y)$ is given.

(a, b) is a point in the domain of f

$$\begin{cases} f_x(a, b) = \lambda g_x(a, b) \\ f_y(a, b) = \lambda g_y(a, b) \\ g(a, b) = 0 \end{cases}$$

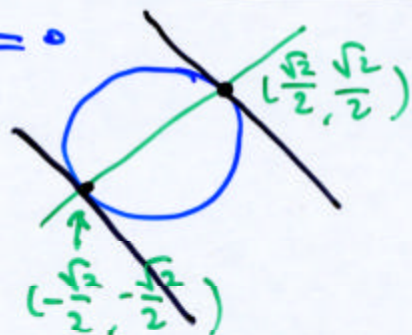
is the Lagrange multiplier

(11.1) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$z = f(x, y) = x + y$

$f_x = 1, f_y = 1$

$g_x = 2x, g_y = 2y$



$$\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 1 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$x = y = \frac{1}{2\lambda}$

$x = y \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2x^2 = 1$

$2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \wedge \quad \Gamma \subset \mathbb{R}^2$$

$$z = f(x, y) = xy.$$

の柱面 Γ の上の停留点を求めよ
