

I $f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$f''(x) = 6x$

2) 増減表は右図

x	-1		0		1	
y'	+	0	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+
y	↖	3	↘	1	↖	-1

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$

II. $f(x) = \sqrt{x}(x-2)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} (x-2) + \sqrt{x} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} (3x-2)$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) (3x-2) + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot 3$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \{ -(3x-2) + 6x \}$$

$$= \frac{3x+2}{4x\sqrt{x}} > 0$$

2) 増減表は右図

	(0)		$\frac{3}{2}$	
y'	/	-	0	+
y''	/	+	+	+
y	(0)	↘	↗	↗

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$(\frac{1}{\sqrt{x}})' = -\frac{1}{2} \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$(x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

開集合

• 開圓盤 (an open disk)

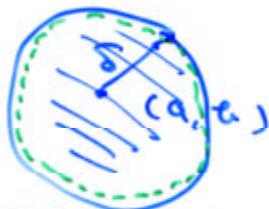
$$B_\delta(a, b)$$

$$\delta > 0$$

$$= \{ (x, y) ;$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2 \}$$

開圓盤內部



部分開集合.

• $U \subset \mathbb{R}^2 \leftarrow$ 平面

$$p \in \mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$$

U 是 開集合 (an open set)

an ensemble ouvert.

任意 q

$$(a, b) \in U \rightarrow \exists \delta > 0$$

$$B_\delta(a, b) \subset U$$

$$B_\delta(a, b) \subset U$$

即 $B_\delta(a, b) \subset U$ 是 U 的一部分

例 4

$$U_1 = \{ (x, y) ; y > 0 \}$$

開集合.

$$(a, b) \in U_1 \rightarrow b > 0$$

$$\delta = \frac{b}{2}$$

$$(a, b) \in U_1$$

$$y = 0$$

x 軸

$$Z_1 = \{ (x, y) ; y \geq 0 \}$$

開集合

Z_1 不是

$$(a, 0)$$

$$y = 0$$

即 $(a, 0) \notin Z_1$

集合の点列コンパクト性の重要性は次の定理にあります。

定理 8.13. U を $\mathbb{R}^2$ の開集合として K を U の点列コンパクトな部分集合とします。このとき

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}$$

が連続であるとき、 f は K 上最大値をとる。

8.6 偏微分係数

平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上定義された 2 変数関数

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in U)$$

を考えましょう。

関数 $z = f(x, y)$ の x に関する $(a, b) \in U$ における偏微分係数とは

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

のことです。 $x-y$ 平面に垂直な平面 $y = b$ による断面を考えます。 $z = f(x, b) = F(x)$ の $x = a$ における接線の傾き $F'(a)$ が

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b)$$

です。

同様に z の y に関する (a, b) における偏微分係数とは

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

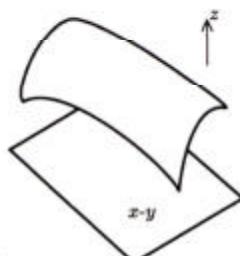
のことです。すなわち y の 1 変数関数 $z = G(y) = f(a, y)$ に対して $G'(b)$ が存在するとき、 f は (a, b) において y に関して偏微分可能であるといい $G'(b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b)$ と記します。それから

$$f_x(a, b) := \frac{\partial z}{\partial x}(a, b), \quad f_y(a, b) := \frac{\partial z}{\partial y}(a, b)$$

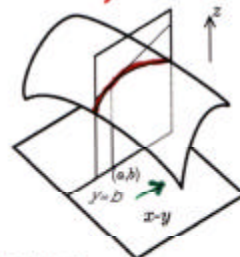
という略記法も用いられます。

例 8.9.

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2$$



$z = F(x)$



$$z = f(x, y)$$



目的変数

説明変数

variable

(a, b)

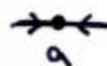
$$F(x) = f(x, b)$$

$$G(y) = f(a, y)$$



$$F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$\parallel$



② $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ f の x に関する偏微分係数

断面 $y = b$

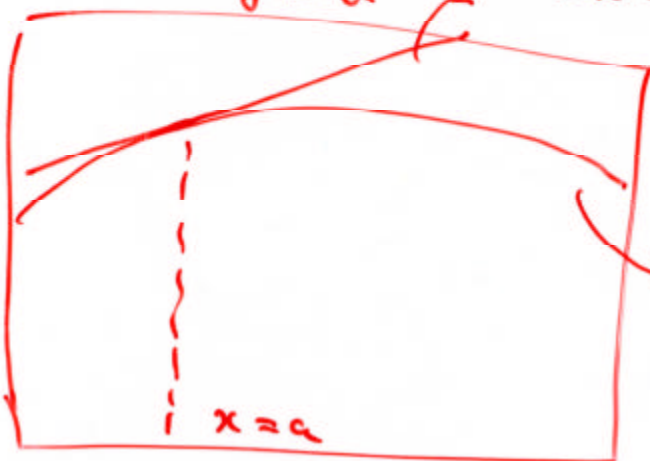
$$\text{値は } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

" $F'(a)$ "

↑ z

$$z = F(x)$$

$$= f(x, b)$$

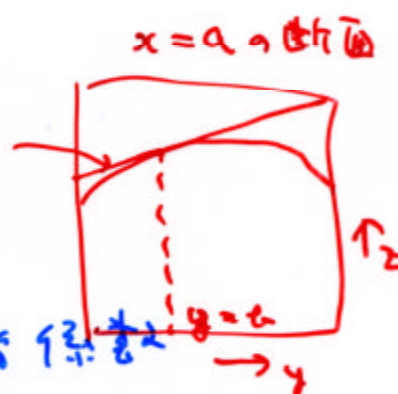


→ x

$$G(y) = f(a, y)$$

$$G'(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, a)$$

$y = a$ 是 f 的偏导数



$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{at } (1, \frac{1}{2})$$

$$F(x) = f(x, \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{4}$$

$$F'(x) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, \frac{1}{2}) = F'(1) = 2$$

$$G(y) = f(1, y) = 1 - y^2 = f(1, y)$$

$$G'(y) = -2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{1}{2}) = G'(\frac{1}{2}) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

② $z = f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$

$$\text{at } (a, a) = f(a, a)$$

$$F(x) = x^3 + 2a^2x + a^3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 2a^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = 3a^2 + 2a^2 = F'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2x \cdot 2y + 3y^2 = 4xy + 3y^2$$

$(x, y) = (1, 1)$ $y = 1$ 是 f 的偏导数

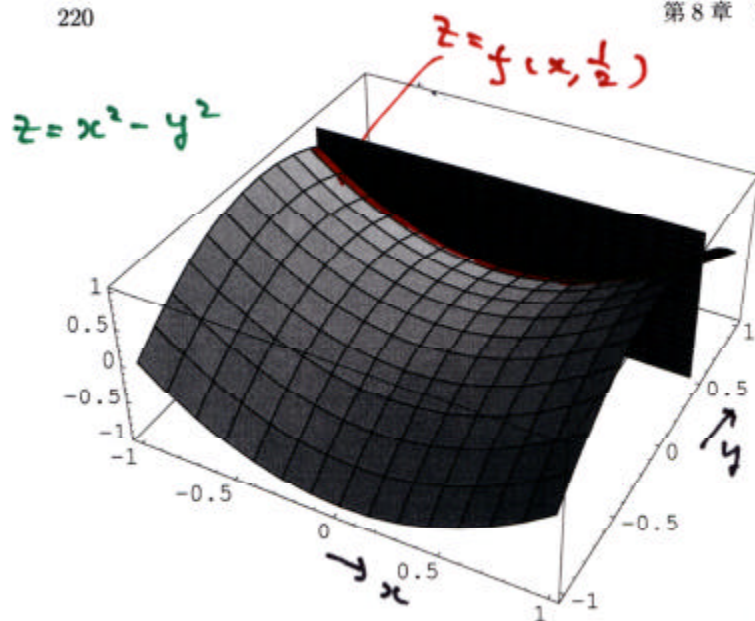


図 8.1: $z = x^2 - y^2$ の $y = \frac{1}{2}$ の断面

を考えます。この関数 $f(x, y)$ の $(1, \frac{1}{2})$ における偏微分係数を考えましょう。
 x に関する偏微分を考えるには

$$F(x) = f(x, \frac{1}{2}) = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

を考えます。このとき

$$F'(x) = 2x, \quad F'(1) = 2$$

から

$$f_x(1, \frac{1}{2}) = 2$$

が分かります。つぎに y に関する偏微分係数ですが

$$G(y) = f(1, y) = 1^2 + y^2$$

を考えることになります。 $G'(y) = 2y$ 、 $G'(\frac{1}{2}) = 1$ ですから

$$f_y(1, \frac{1}{2}) = 1$$

が導かれます。

例 8.10.

$$z = f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

の (a, b) における偏微分係数を求めましょう。

$$F(x) = f(x, b) = x^3 + 2xb + b^3$$

において $F'(x) = 3x^2 + 2b$ ですから

$$f_x(a, b) = F'(a) = 3a^2 + 2b$$

が成立します。他方

$$G(y) = f(a, y) = a^3 + 2ay^2 + y^3$$

において $G'(y) = 4ay + 3y^2$ ですから

$$f_y(a, b) = 4ab + 3b^2$$

を得ます。

$\mathbb{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$z = f(x, y)$$

が任意の (a, b) において x に関する偏微分係数を持つときを考えます。このとき関数

$$f_x : U \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto f_x(x, y)$$

を定めることができます。これを f の x に関する偏導関数と呼びます。この f_x の x に関する偏微分係数を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = f_{xx}(a, b)$$

と記します。 y に関する偏微分係数を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = f_{xy}(a, b)$$

と記します (x と y の順序がことなっていることに注意しよう)。

$$f_{xy}(a, b), \quad f_{yx}(a, b)$$

の相違に関しては次の定理があります。

定理 8.14. f が U 上 C^2 級とします。すなわち

$$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$$

の2階までの偏導関数が存在して U 上連続であるとしします。このとき U 上

$$f_{xy} = f_{yx}$$

が成立します。

この定理の証明は省略します。



定理 $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$
 $c \in (a, b)$

$\begin{array}{ccc} \circ & | & \circ \\ a & c & b \end{array} \quad f(c) \text{ is a local } \text{ext} \implies f'(c) = 0$

$z = f(x, y)$ on $(a, b) \times (c, d)$

$z = F(x) = f(x, c)$

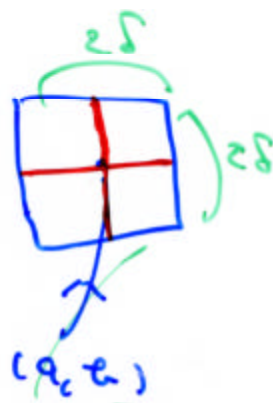
$z = G(y) = f(a, y)$

$\leadsto F(x)$ is $x = a$ is a local ext
 $G(y)$ is $y = c$ is a local ext

$\leadsto F'(a) = 0, G'(c) = 0$

$\leadsto \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, c) = 0}$

$\leadsto (a, c)$ is a $\frac{1}{2}$ stationary point
 (stationary point)



演習 8.7. 次の関数に対して偏導関数 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を計算しましょう。

(1) $z = f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 5y^4$

(2) $z = f(x, y) = x \log(x^2 + 2y^2)$

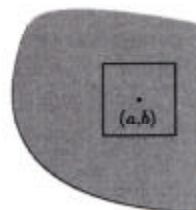
8.7 極大、極小、停留点

定義 8.4. (極小値・極大値)

$z = f(x, y)$ が (a, b) において極大値 (resp. 極小値) をとるとはある $\delta > 0$ が存在して

$$\{(x, y); |x - a| < \delta, |y - b| < \delta\}$$

上 f が最大 (resp. 最小) であるときです。



(a, b) が極大・極小点

区間 $I = (A, B)$ 上の1変数関数 $g(t)$ が $t = t_0 \in (A, B)$ で極値をとるならば

$$g'(t_0) = 0$$

が成立することを思い出しましょう。

もし $z = f(x, y)$ が (a, b) において極値をもつならば $F(x) = f(x, b)$ と $G(y) = f(a, y)$ はそれぞれ $x = a$ と $y = b$ で極値をとります。従って

$$F'(a) = 0, \quad G'(b) = 0$$

を得ます。ところで、この条件は

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = 0$$

を意味します (このとき (a, b) は f の停留点であるといいます)。

定理 8.15. $z = f(x, y)$ が (a, b) で極値をとるならば

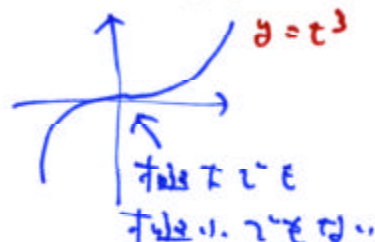
$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = 0$$

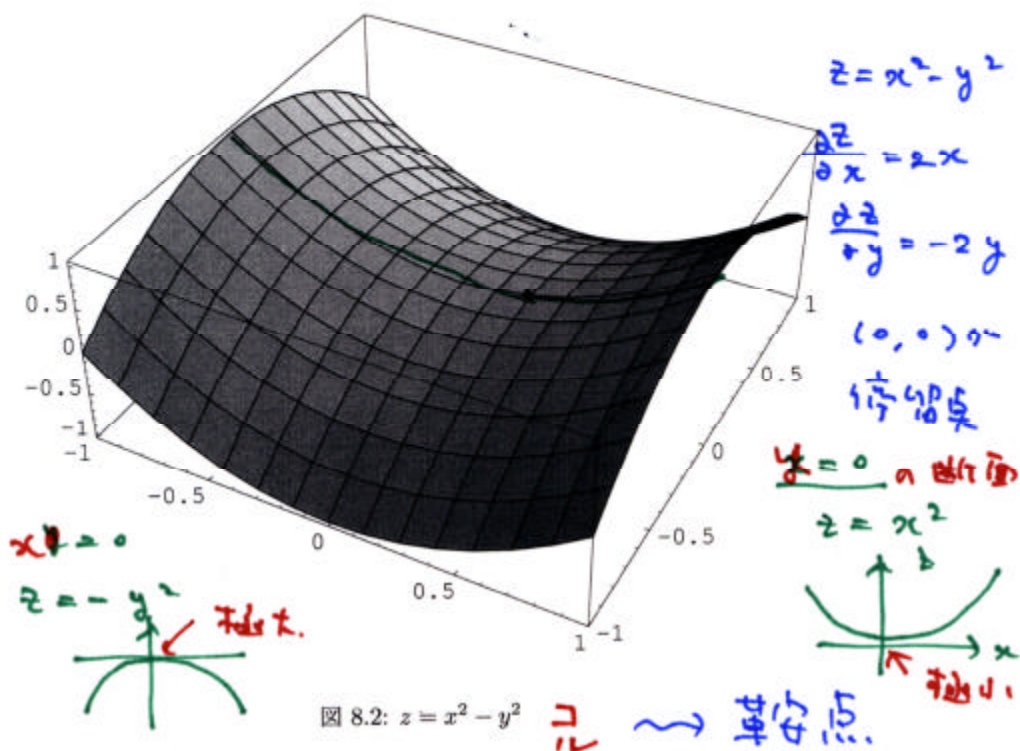
を満たします。

注意 8.1. 定理の逆は必ずしも成立しません。関数 $z = x^2 - y^2$ において $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ ですから z の停留点は $(0, 0)$ である。ところが $(0, 0)$ では極値をとりません。

例 $f(t) = t^3$
 $f'(0) = 0$

$f'(t) = 3t^2$



図 8.2: $z = x^2 - y^2$

いくつかの計算例を示しましょう。

例 8.11. 関数

$$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

の停留点を求めましょう。

$$\begin{cases} z_x = 2x + 4y - 6 = 0 \\ z_y = 4x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

を満たす (x, y) は、この連立 1 次方程式を解いて $(x, y) = (1, 1)$ です。

例 8.12. 関数

$$z = f(x, y) = x^3 - xy - y^2$$

の停留点を求めましょう。

点 (x, y) が停留点となる条件は

$$z_x = 3x^2 - y = 0 \quad (8.10)$$

$$z_y = -x - 2y = 0 \quad (8.11)$$

I

$$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

∴ 停留点を求めよ.

II

$$z = xy(2 - x - y) \quad \text{∴ 停留点を求めよ.}$$

$$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ or } B=0$$