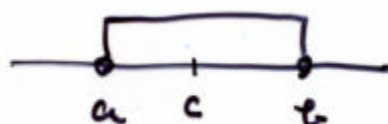


$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$



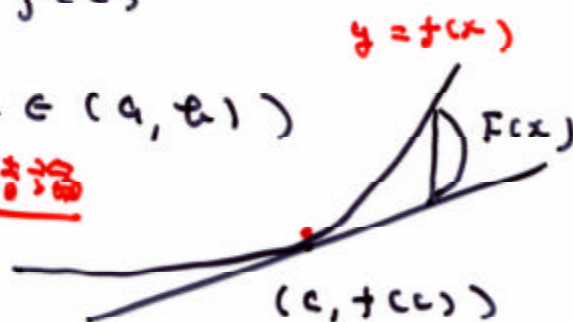
$x=c$ における
増減表の方程式

$$y = f'(c)(x-c) + f(c)$$

仮定

$$f''(x) > 0 \quad (x \in (a, b))$$

結論



$$f(x) - f(c)$$

$$F(x) = f(x) - [f'(c)(x-c) + f(c)]$$

$$F'(x) = f'(x) - f'(c)$$

$$F(c) = 0$$

$$F''(x) = f''(x) > 0 \quad (\text{常に})$$

$F'(x)$:
増減表の単調性 = 増 0

$$x < c < y \Rightarrow F'(x) < F'(c) < F'(y)$$

	c	
F'	-	+
F	↘	↗

$$F(x) > 0 \quad x \neq c$$

$$F(x) = f(x) - f'(c)(x-c) - f(c)$$

$$f(x) > f'(c)(x-c) + f(c)$$

$$(x \neq c)$$

$$(a, b) \subseteq f \text{ は } F \text{ に } \square$$

$$\underline{g'(x) > 0 \text{ 第12}}$$

$\leadsto g$: 単調増加 or
increasing

$\Downarrow$
decreasing

$$t < t' \Rightarrow g(t) < g(t')$$



基本

$$t \rightarrow \infty \text{ 又は } t \rightarrow -\infty$$

$$\frac{1}{t} \rightarrow 0 \text{ (positive)}$$

$$t \rightarrow \infty \text{ 又は } t \rightarrow -\infty$$

$$\frac{1}{t} \rightarrow 0 \text{ (negative)}$$

と c の両側で符号が変化することが分ります。このことから F の増減表を求めると

t	a		c		b
F'		-	0	+	
F		$\searrow$	$F(c) = 0$	$\nearrow$	

となります。以上から

$$f(t) > f'(c)(t-c) + f(c) \quad (t \neq c)$$

が証明されました。グラフが接点 $(c, f(c))$ を除いて接線の上にあることを意味します（右上の図を参照）。この状況にあるとき $y = f(x)$ が区間 (a, b) において下に凸であるといいます。

次に

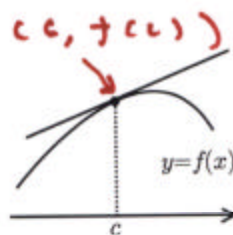
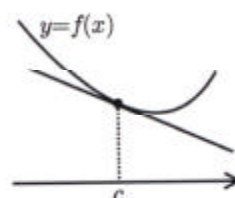
$$f''(x) < 0 \quad (x \in (a, b))$$

が成立すると仮定します。このとき、 $f' > 0$ が常に成立する場合と同様の議論を行うと

$$f(t) < f'(c)(t-c) + f(c) \quad (t \neq c)$$

が証明されます。グラフが接点 $(c, f(c))$ を除いて接線の下にあることを意味します（右図を参照）。この状況にあるとき $y = f(x)$ が区間 (a, b) において上に凸であるといいます。

以上をまとめて次の定理を証明したことになります。



まとめ

定理 4.8. 開区間 (a, b) 上定義された関数

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

が 2 階微分可能とします。

(i) f の 2 階の微分係数が常に正とします。すなわち

$$f''(x) > 0 \quad (x \in (a, b))$$

が成立するとします。このとき任意の点 $c \in (a, b)$ に対して

$$f(t) > f'(c)(t - c) + f(c) \quad (t \neq c)$$

が成立します。

(ii) f の 2 階の微分係数が常に負とします。すなわち

$$f''(x) < 0 \quad (x \in (a, b))$$

が成立するとします。このとき任意の点 $c \in (a, b)$ に対して

$$f(t) < f'(c)(t - c) + f(c) \quad (t \neq c)$$

が成立します。

この定理 4.8 は、関数の極値問題を考えるときに停留点が極大・極小である十分条件を与えるときにも有用になります (93 ページの 4.3.3 節を参照)。

定理

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

仮定

$$f''(t) > 0 \quad (t \in (a, b))$$

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(t)$ が $t = c$ で

極大 or 極小

$$\Rightarrow f'(c) = 0$$

逆は不成立

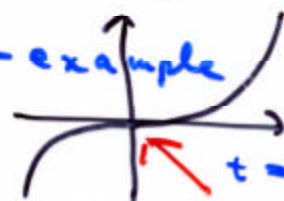
counter-example

反例

$$f(t) = t^3$$

$$f'(t) = 3t^2$$

$$t = 0 \text{ で } f'(0) = 0$$



$$y = t^3$$

極大 or 極小

ではない

Q

$f'(c) = 0$ が成立するとは

$f(c)$ が 極大, 極小, 重なるように
判別する (t が 零)

定理 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

4.9. f', f'' 均存在且连续.

$$t_n \rightarrow c \Rightarrow a < c < b$$

$$f(t_n) \rightarrow f(c)$$

$$f'(c) = 0, f''(c) > 0$$

$$f''(c) < 0$$

$\Rightarrow f(c)$ 是极大值.



定理 4.8

$$g = f''$$

$g(t)$ 在 (a, b) 上连续

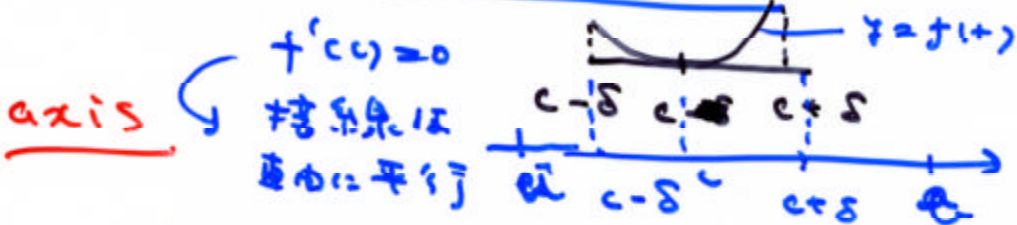
$$g(c) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ s.t. } g(t) > 0 \text{ for } t \in (c-\delta, c+\delta)$$

$$f''(c) > 0, f'' \text{ 连续}$$

$\exists \delta > 0$ 使得



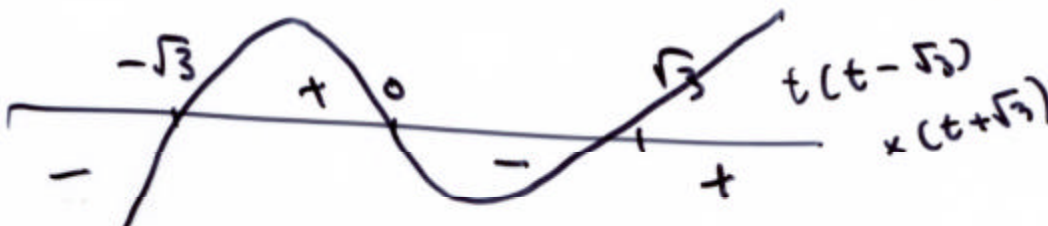
$$f''(t) > 0 \quad (c-\delta < t < c+\delta)$$



$$f(t) > f(c) \quad t \neq c$$

$$\Leftrightarrow f' > 0$$

$$(c-\delta < t < c+\delta)$$



$$t(t^2-3) = (t+\sqrt{3})t(t-\sqrt{3})$$

4.3.2 凹凸を含める増減表

実軸上で定義された関数

$$f(t) = e^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

について考えましょう。 $f(x)$ の導関数と第2次導関数を求めましょう。

あじ.

$$f'(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \left(-\frac{t^2}{2} \right) = -te^{-\frac{t^2}{2}} > 0$$

$$f''(t) = -(t)'e^{-\frac{t^2}{2}} - t \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right)' = -e^{-\frac{t^2}{2}} - t(-t)e^{-\frac{t^2}{2}} = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ここで $e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$ に注意すると f' の符号と $-t$ の符号、 f'' の符号と $t^2 - 1$ の符号が一致することが分ります。このことから凹凸を含めた増減表は

$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow -t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 0$$

$$f''(t) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t < -1 \text{ 或 } t > 1$$

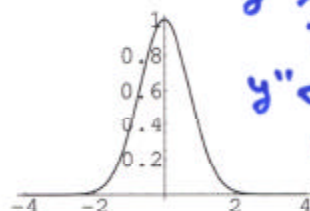


$$-1 < t < 1$$

$$\begin{array}{c} +'' \\ \downarrow \\ + \\ \downarrow \\ -'' \end{array}$$

t		-1		0		1	
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

となります。右に Mathematica によるグラフを描きます。



$y'' > 0$
下凹
 $y'' < 0$
上凸

上に与えた凹凸を含めた増減表の見方を説明します。右の表にあるように、増加・減少は y' の符号で、グラフの上に凸・下に凸は y'' の符号で定まります。その組み合わせで4通りの場合が生じますが、それを上向き、下向きの矢印に丸みをつけて表示しています。

y'	y''	y	増減・凹凸
+	+	$\nearrow$	増加・下に凸
+	-	$\searrow$	増加・上に凸
-	+	$\searrow$	減少・下に凸
-	-	$\searrow$	減少・上に凸

次に関数

$$y = f(x) = xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

について凹凸を含めた増減表を求めましょう。 y の導関数と第2次導関数を計算すると

$$y' = e^{-t^2} + t \cdot e^{-t^2}(-2t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$$

$$y'' = (-4t)e^{-t^2} + (1 - 2t^2)e^{-t^2}(-2t) = 2t(2t^2 - 3)e^{-t^2}$$

となります。 $e^{-t^2} > 0$ より y' の符号は $1 - t^2$ の符号と一致し、 y'' の符号は $t(2t^2 - 3)$ の符号と一致する。このことから増減表は

t		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{6}}{2}$	
y'	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
y''	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
y	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

となる。Mathematica によるグラフは次のようになります。

→ 凹凸・増減

1. テスト問答

calco

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

$y = \frac{t}{1+t^2}$ のグラフを求めよ。

$$y' = \frac{(t)'(1+t^2) - t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2) - 2t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

$1-t^2$

 $u^2 \quad u = 1+t^2$
 $\frac{du}{dt} = 2t$

$$y'' = \frac{(1-t^2)'(1+t^2)^2 - (1-t^2)\{[(1+t^2)^2]'\}}{(1+t^2)^4}$$

$$= \frac{-2t(1+t^2)^2 - (1-t^2) \times 2(1+t^2) \times 2t}{(1+t^2)^4}$$

$2u \cdot \frac{du}{dt}$

$$= \frac{-2t\{(1+t^2) + 2(1-t^2)\}}{(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{-2t(3-t^2)}{(1+t^2)^3} = \frac{2(t^2-3)t}{(1+t^2)^3}$$

以上から増減表は下図

	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	
y'	-	-	0	+	+	+
y''	-	0	+	+	+	0
	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	

$t \rightarrow \pm\infty$ とき

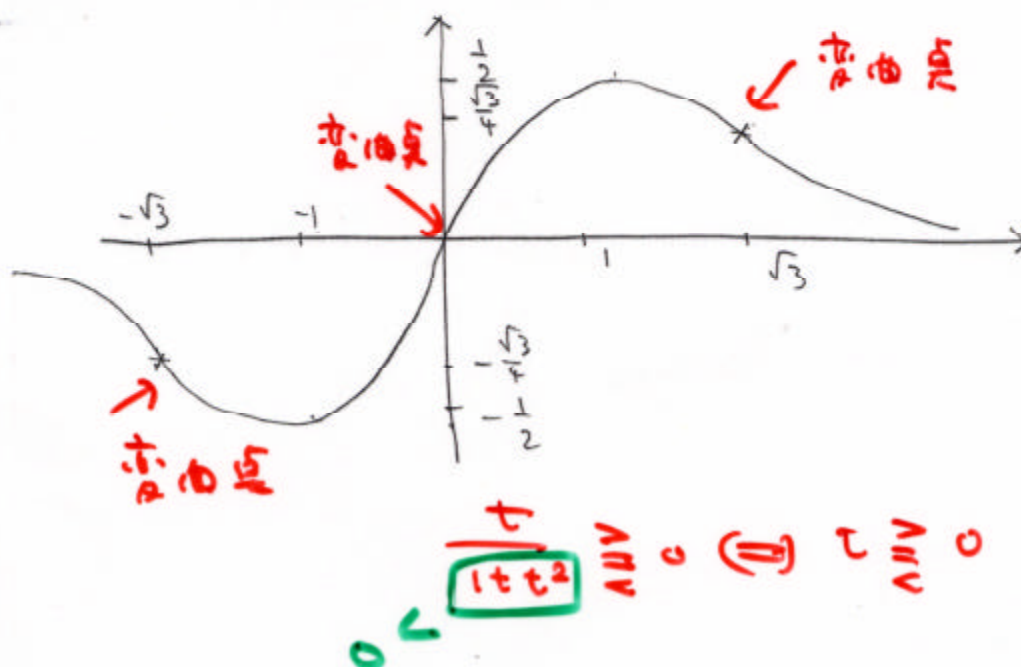
$$= \frac{1}{t} \times \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{(\frac{1}{t})^2 + 1} \rightarrow 0 \times \frac{1}{0+1} = 0 \times 1 = 0$$



$t \rightarrow \pm\infty$ とき $\frac{1}{t} \rightarrow 0$

±xE から 0 まで 下に 1 に 1/3.



1. 2. 3.

I $f(x) = x^3 - 3x + 1$ の 増減表

II $f(x) = \sqrt{x}(x-2)$ の 増減表.

1 = 2.5% 1.2%

linear
approximation

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \rightarrow f'(c) \quad (t \rightarrow c) \text{ ほぼ等しい}$$

$t \sim c$ あたり
(t が c に近い)

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \doteq f'(c)$$

$y = f(t)$

$$f(t) \doteq f(c) + f'(c)(t - c)$$

(134)

$$f(t) = (1+t)^n \quad c = 0$$

$$f'(t) = n(1+t)^{n-1}$$

$$f'(0) = n \quad f(0) = 1$$

$$t \sim 0 \quad \boxed{f(t) \doteq 1 + nt}$$

$$(1.01)^{10} \doteq 1.1 \quad f''(t) = n(n-1)t^{n-2} \\ \doteq 1 + 10 \times 0.01$$

2 = 2.5% 1.2% ← Taylor 展開

$$f(t) \doteq f(c) + f'(c)(t - c) + f''(c) \frac{(t - c)^2}{2}$$

$$f(t) = (1+t)^n \quad t \sim 0$$

$$f(t) \doteq 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2} t^2$$

$$(1.01)^{10} \doteq 1 + 10 \times 0.01 + \frac{10 \times 9}{2} (0.01)^2$$

$$= 1.1 + \frac{45 \times 10^{-4}}{0.0045} = 1.1045$$

1.104622125