

6/9

小テスト解説

09年度
calc

$$\text{I (1)} \quad \left(\frac{\log t}{t} \right)' = \frac{(\log t)' t - \log t \cdot (t)'}{t^2} \\ = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \log t \cdot 1}{t^2} = \frac{1 - \log t}{t^2}$$

$$(2) \quad y = e^{-3t} = e^x \quad (x = -3t) \quad (e^x)' = e^x \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^x \cdot (-3) = -3 e^{-3t}$$

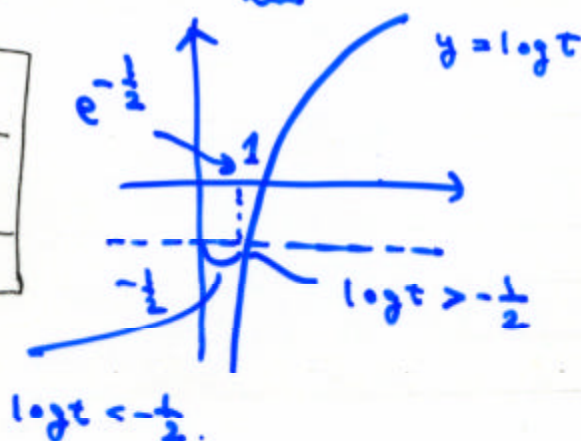
$$(3) \quad \left\{ t^{\frac{1}{3}} (t-1) \right\}' = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} (t-1) + t^{\frac{1}{3}} \cdot 1 \\ = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \{ (t-1) + 3 t^{\frac{2}{3}} \cdot t^{\frac{1}{3}} \} \quad \text{sign} \\ = \boxed{\frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}} (t+2) \quad \begin{matrix} \text{yの符号} = (t-1) \\ \text{の符号} \end{matrix}$$

$$(4) \quad (t^2 e^{-t})' = 2t \cdot e^{-t} + t^2 \cdot e^{-t} \times (-1) \\ = e^{-t} (2t - t^2) \\ = e^{-t} t (2-t)$$

$$\text{II} \quad y = t^2 \log t \quad y' = \underline{2t} \log t + t^2 \times \underline{\frac{1}{t}} = t (2 \log t + 1) \quad \text{"} \frac{1}{t} = \frac{1}{2t} \times (2 \log t + 1) \text{"}$$

t	(0)	$e^{-\frac{1}{2}}$	
	-	0	+
(0)	↓		↗

$$e^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \\ = -\frac{1}{2e}$$



演習13

1. 7. 2. 1. 解答. (6/7 実数)

$$I \quad y = \frac{\log t}{t} \quad y' = \frac{(\log t)'t - \log t \cdot (t)'}{t^2}$$

真数 $t > 0$

$$= \frac{\frac{1}{t} \times t - \log t}{t^2} = \frac{1 - \log t}{t^2} \quad (t^2 > 0)$$

$$f') \quad y' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \log t \geq 0 \Leftrightarrow \log t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow t \leq e$$

となる。これをを用いた増減表を求めると下図になる。

t		e	
y'	+	0	-
y	↗	$\frac{1}{e}$	↘



$$t \rightarrow +0 \text{ 附近}$$

$$t > 0 \text{ 附近}$$

$$t \rightarrow 0$$

$$t \rightarrow +\infty \text{ 附近}$$

$$\log t \rightarrow -\infty, \quad \frac{1}{t} \rightarrow +\infty \quad f')$$

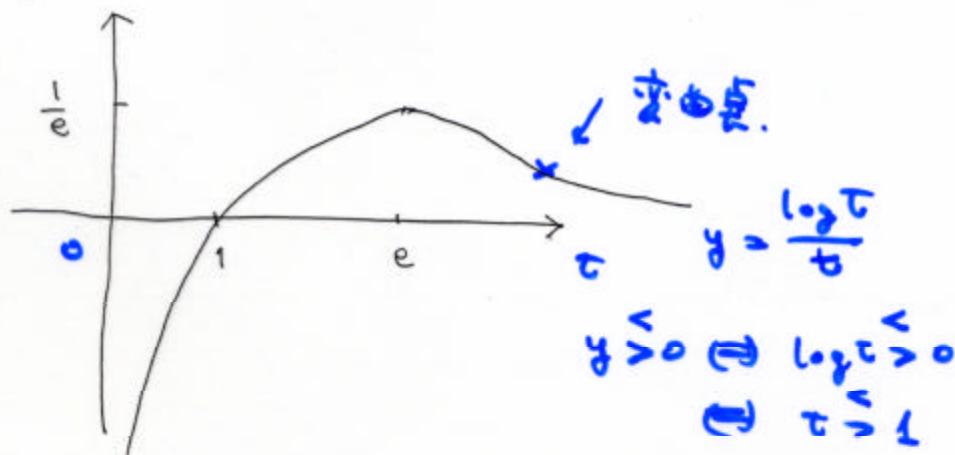
$$\frac{\log t}{t} \rightarrow -\infty$$

$$s = \log t \text{ とおくと } s \rightarrow +\infty \text{ であり}$$

$$t = e^s$$

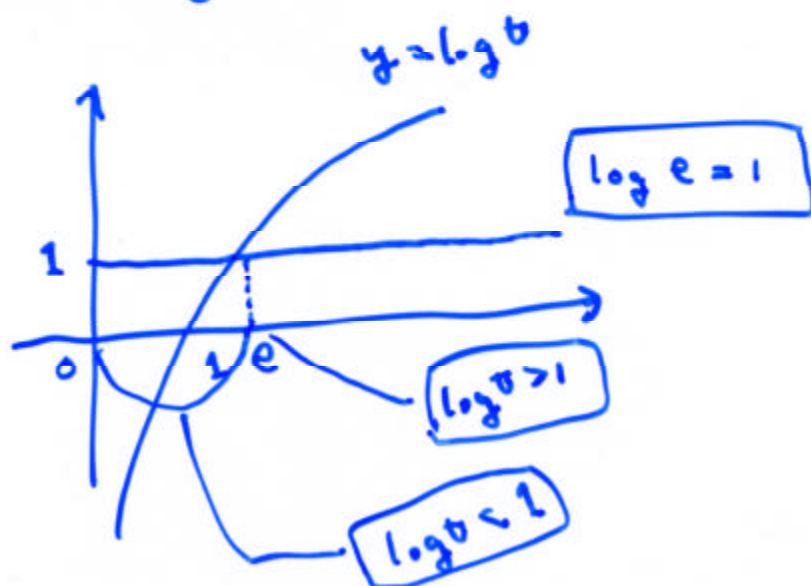
$$\frac{\log t}{t} = \frac{s}{e^s} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow +\infty)$$

が従う。上図からグラフは下図である。



$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - g f'}{f^2}$$

$$(\log t)' = \frac{1}{t}$$



$$\begin{aligned} t \rightarrow +0 \text{ alors } \log t &\rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty \text{ alors } \log t &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

tendre vers ∞

$$t \rightarrow +\infty \quad \log t \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\log t}{t} \rightarrow ? \quad \frac{+\infty}{+\infty} \text{ indéterminé}$$

$$\boxed{\text{# 1} \quad t \rightarrow +\infty \quad \frac{t^k}{e^t} \rightarrow 0}$$

voir.
à la semaine prochaine

$$y = e^{ct} = e^x \quad x = ct \quad c: \text{定数}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^x \cdot c = ce^{ct}$$

公式

$$(e^{ct})' = ce^{ct}$$

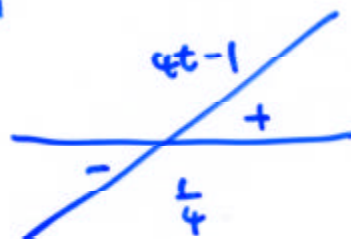
$$y' = cy$$

微分方程式
① ②

$$(3) \quad (t^a)' = at^{a-1}$$



t	(0)		$\frac{1}{4}$	
a		-	0	+
y	(0)	↓	*	↗



$$y = t^{\frac{1}{3}}(t-1)$$

$t \rightarrow +0$

$$t^{\frac{1}{3}} \rightarrow +0, t-1 \rightarrow -1$$

$$t^{\frac{1}{3}}(t-1) \rightarrow 0 \times (-1) = 0$$

$$t \rightarrow +\infty \quad t^{\frac{1}{3}} \rightarrow +\infty, (t-1) \rightarrow +\infty$$

$$t^{\frac{1}{3}}(t-1) \rightarrow +\infty$$

$$e^s \rightarrow +\infty$$

$(s \rightarrow +\infty)$

$$t^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \log t} \rightarrow +\infty$$

$\frac{1}{3} \log t \rightarrow +\infty$

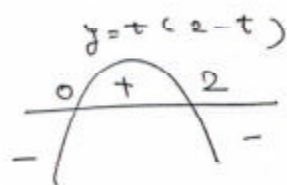
$$\text{II } y = t^2 e^{-t} \quad y' = (t^2)' e^{-t} + t^2 (e^{-t})'$$

$$= 2t e^{-t} + t^2 (-e^{-t})$$

$$= e^{-t} (2t - t^2)$$

$$= e^{-t} t(2-t)$$

$$(e^{ct})' = c e^{ct}$$



2) 増減表は下図

t		0		2	
y'	-	0	+	0	-
y	↘		↗		↘

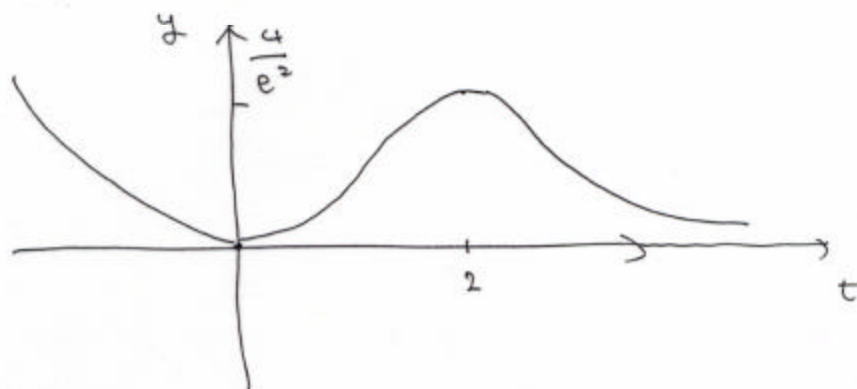
$$t \rightarrow +\infty \quad a < 1 \quad \frac{t^2}{e^t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

$$t \rightarrow -\infty \quad a < 1 \quad e^{-t} \rightarrow +\infty$$

$$t^2 \rightarrow +\infty$$

$$\text{2) } y = t^2 \cdot e^{-t} \rightarrow +\infty.$$

2) のグラフは下図



$$\text{III } y = t e^{-t^2}$$

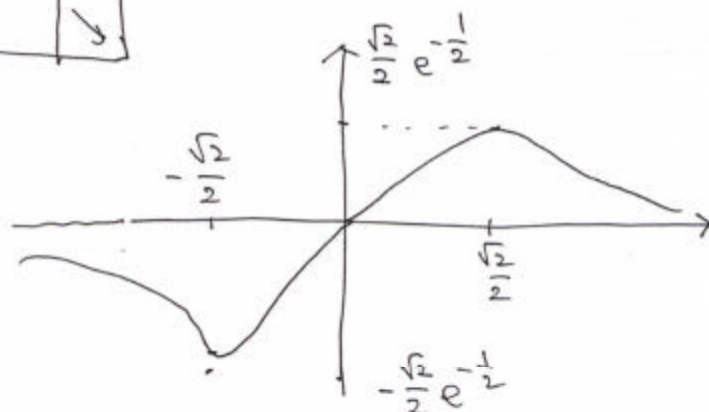
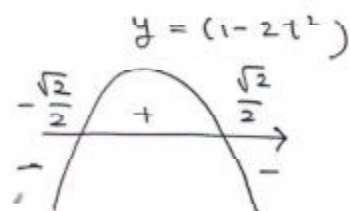
$$y' = (t)' e^{-t^2} + t \cdot (e^{-t^2})'$$

$$= e^{-t^2} + t e^{-t^2} (-2t)$$

$$= (1 - 2t^2) e^{-t^2}$$

ル) 増減表は下図である。

t		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
y'	-	0	+	0	-
y	↘		↗		↘



$$\text{§5} \quad s = t^2 \text{ とおくと}$$

$$t > 0 \text{ かつ } t \rightarrow +\infty \text{ かつ } s \rightarrow +\infty \text{ である。}$$

$$t e^{-t^2} = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{e^s} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow +\infty)$$

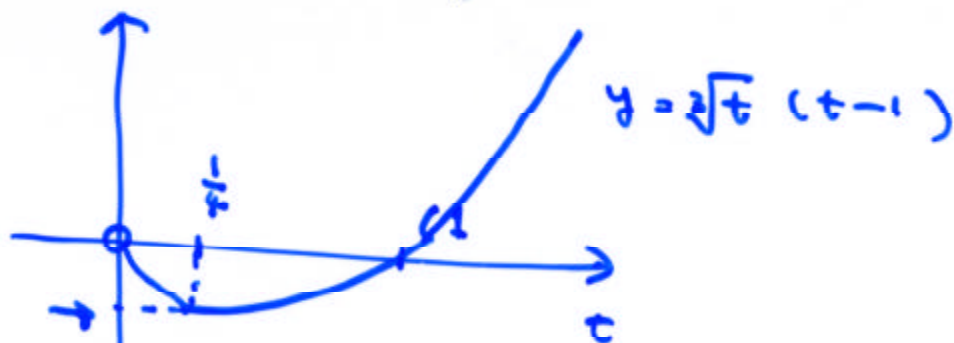
$$t < 0 \text{ かつ } t \rightarrow -\infty \text{ かつ } s \rightarrow +\infty \text{ である。}$$

$$t e^{-t^2} = \frac{-s^{\frac{1}{2}}}{e^s} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow +\infty)$$

である。したがって図である。

$$y = \underbrace{t^{\frac{1}{2}}}_0 (t-1)$$

$t > 0$ $y > 0 \Leftrightarrow t-1 > 0 \Leftrightarrow t > 1$



II $y = t^2 \log t$

• $t \rightarrow +\infty$
 $t^2 \log t \rightarrow +\infty \cdot +\infty = +\infty$

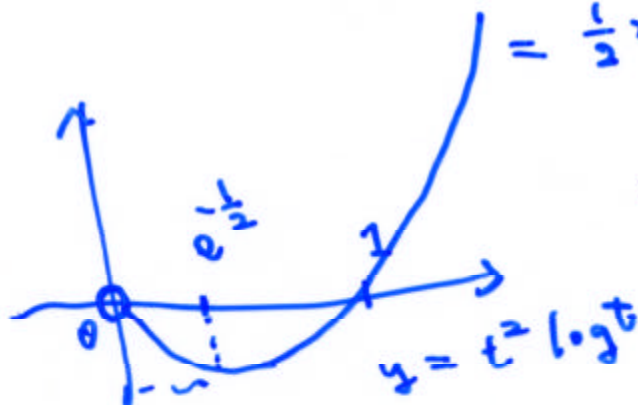
• $t \rightarrow +0$ 不定形
 $t^2 \log t \rightarrow 0 \times (-\infty) ?$

$s = -\log t \rightarrow +\infty$ $t = e^{-s}$

$$t^2 \log t = e^{-2s} s$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2s}{e^{2s}} \rightarrow 0 \times \frac{1}{2} = 0$$

$2s \rightarrow +\infty$



$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$f(c)$ ou $f(c)$ ~~est~~ ^{est} la minimale
(minimal value)



$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ s.t. $f(x) \geq f(c) - \epsilon$

$f(c)$ ou $(c-\delta, c+\delta)$ ~~est~~ ^{est} la minimale

δ
 Δ

定理 $a = b$

$f'(c) = 0$ NB. c is a local extremum

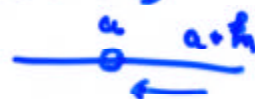
例 $a = b$

La définition

$f(c)$: minimale

$h \rightarrow +0$ $h > 0$ a.s. $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \longrightarrow f'(c) \quad (h \rightarrow 0)$$



$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

$$(h) > 0$$

$$h \rightarrow +0$$

$$\implies f'(c) \geq 0$$

極小値は π の関係で。

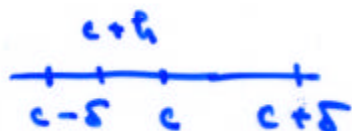
定理

$$a_n \leq b_n \quad \forall n$$

$$a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta \implies \alpha \leq \beta.$$

$$\frac{h \rightarrow -0}{h < 0 \text{ かつ } h \rightarrow 0}$$

$$\frac{(f(c+h) - f(c))}{h} \leq 0$$



$$\Rightarrow \frac{h \rightarrow -0}{f'(c) \leq 0}$$

$$f'(c) \leq 0 \text{ かつ } f'(c) \geq 0 \leadsto f'(c) = 0$$

Rolle's Theorem



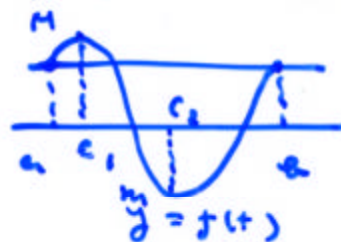
$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$[a, b]$ is continuous, (a, b) is differentiable.

$$f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ such that}$$

$$f'(c) = 0$$



(Proof) 最下値の定理より、最上値・最下値あり。

$$\text{最上 } M = f(c_1), \text{ 最下 } m = f(c_2)$$

$$\textcircled{1} M = m = f(a) = f(b) \text{ かつ } a < b$$



$$\rightarrow f(x) \equiv f(a) = f(b)$$

$$\text{かつ } \textcircled{2} (M \neq f(a)) \text{ or } \textcircled{3} (m \neq f(a)) \rightarrow f'(x) \equiv 0$$

$$\textcircled{2} M > f(a) = f(b) \quad \textcircled{3} m < f(a) = f(b)$$

$$\rightarrow a < c_1 < b$$

$$f(c_1): \text{ 最大}$$

$$\Rightarrow f'(c_1) = 0$$

$$\rightarrow a < c_2 < b$$

$$f(c_2): \text{ 最小}$$

$$\Rightarrow f'(c_2) = 0$$

平均値の定理 ← Rolle の定理から.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

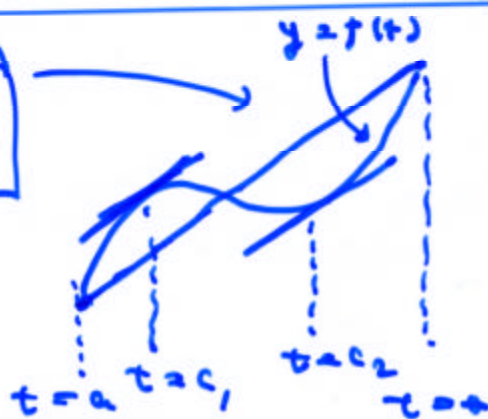
$[a, b]$ に連続, (a, b) 内で可微

$\Rightarrow$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

またある $c \in (a, b)$ が存在.

$$\text{傾き} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



定理から c が導ける

↓ Corollary

(2.1) $f: (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$ 内で可微 (連続性)
 $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f: \text{単調増加}$

(証明)

傾き... 0 以上...



$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(c) \geq 0 \\ \text{ここで } b - a > 0 &\Rightarrow f(b) - f(a) \geq 0 \\ &\Rightarrow f(b) \geq f(a) \\ &\Rightarrow f(b) > f(a) \end{aligned}$$

$a < c < b$
 $\exists c \in (a, b)$

for ~~た~~ ~~い~~ ~~意~~ ~~味~~ ~~を~~ ~~単~~ ~~調~~ ~~に~~ ~~増~~ ~~す~~
(た 意) ~~和~~ ~~意~~

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

<

1. テスト

$$y = \frac{t}{1+t^2}$$

$a = \frac{1}{2}$ となる t を求めよ.