

5/26.

1

小テスト 解答 (5/19日)

$$I (1) \{ (3x+2)x^2 \}' = (3x+2)'x^2 + (3x+2) \cdot (x^2)'$$

$$= 3x^2 + (3x+2) \cdot 2x$$

$$= x \{ 3x + 2(3x+2) \} = x(9x+4)$$

$$(2) \{ \sqrt{x}(3x-1) \}' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} (3x-1) + \sqrt{x} (3x-1)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (3x-1) + \sqrt{x} \cdot 3$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \{ (3x-1) + 3\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} \}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (9x-1)$$

$$(3) \left(\frac{3x-1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{(3x-1)'\sqrt{x} - (3x-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - (3x-1) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{3\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} - (3x-1)}{2\sqrt{x} \cdot x}$$

$$= \frac{3x+1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow (x > 0) \quad (\sqrt{x}(x-1))' = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$$

$$(4) \left(\frac{x-1}{x^2+1} \right)' = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+1 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

II $x \neq 1$ $a \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{1 + x + x^2 + \dots + x^n} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\sum_{k=0}^n x^k$$

両辺を微分する

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^n kx^{k-1}$$

$$= \frac{(1 - x^{n+1})'(1 - x) - (1 - x^{n+1})(1 - x)'}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{(1 - x) \{ -(n+1)x^n \} + (1 - x^{n+1})}{(1 - x)^2}$$

$\therefore$ 両辺に x をかけると

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

$$= \sum_{k=1}^n kx^k$$

$$= x \cdot \frac{(1 - x) \{ -(n+1)x^n \} + (1 - x^{n+1})}{(1 - x)^2}$$

$|x| < 1$ $a \in \mathbb{Z}$ $n \rightarrow +\infty$ とする

$$x^n \rightarrow 0$$

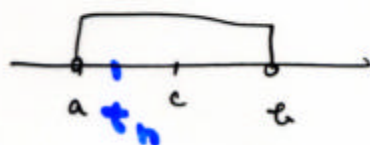
$$nx^n \rightarrow 0$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \frac{x}{(1 - x)^2}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

連続関数の性質



$$\textcircled{1} f: (a, c) \longrightarrow \mathbb{R}$$

“ $c \in (a, c)$ ” 連続とは

$$\lim_{t \rightarrow c} f(t) = f(c)$$

$f(t_n)$ の
連続性による

“ ” と “ ” である。 全 “ ” に対して $\{t_n\}$ に対して

$$t_n \in (a, c)$$

$$t_n \neq c$$

$$t_n \rightarrow c$$

$$\Rightarrow f(t_n) \rightarrow f(c) \quad (n \rightarrow \infty)$$

“ ” 成立するとき “ ” である。

$$\textcircled{2} f: [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$



“ $t = a$ ” 連続とは

$$\lim_{t \rightarrow a+0} f(t) = f(a)$$

右から $t \rightarrow a$
右連続性

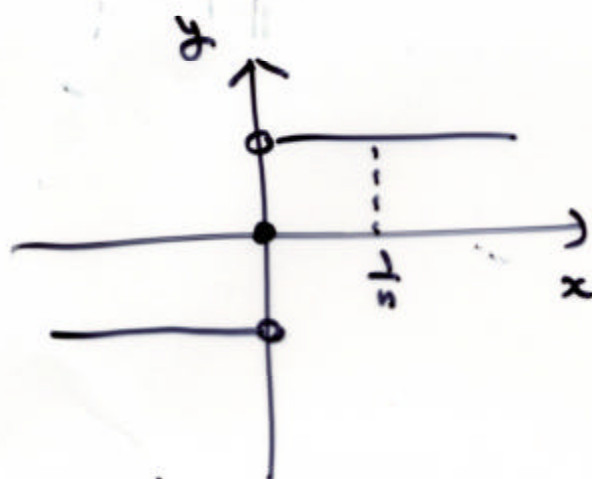
“ ” 成立するとき “ ” である。 2P3

$$\left. \begin{array}{l} a < t_n \leq c \\ t_n \rightarrow a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow f(t_n) \rightarrow f(a)$$

“ ” 成立するとき “ ” である。

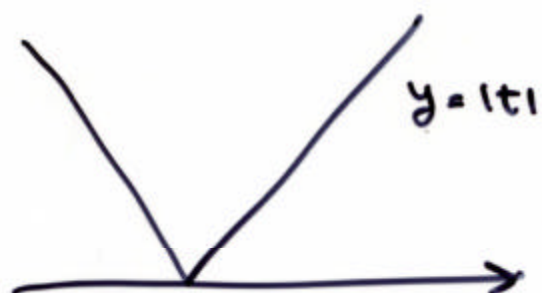
VSP
Very Special One Pattern



$$t_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$f(t_n) = 1 \rightarrow 1 \neq f(0) = 0$$

$\leadsto$ f は $t=0$ で連続でない



$t=0$ で連続

（絶対値は連続）

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

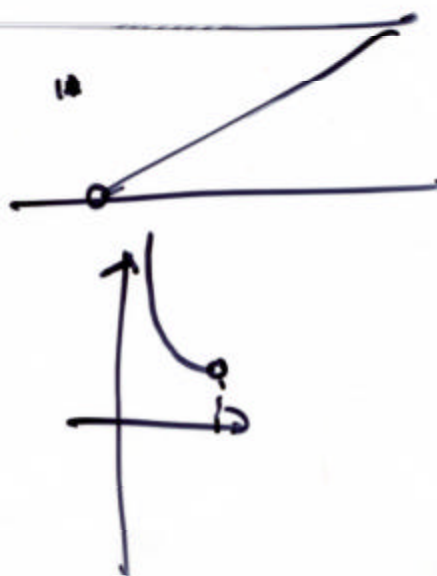
$$t \mapsto t$$

直線を通る

$$f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

双曲線を通る



③ 最大値の定理.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

が $[a, b]$ の各点で連続とする. $a < b$.

「 f は 最大値 と 最小値 が 存在する。」

↑ $f(b)$
↑ r
↑ $f(a)$

④ 中間値の定理 連続な函数

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$



に おいて $f(a) < f(b)$ かつ $a < t_0 < b$ 成立するとする. 任意の $r \in (f(a), f(b))$ に対して

$$r = f(t_0)$$

を満たす $t_0 \in (a, b)$ が存在する.

③, ④ の定理は 非常に 難しい 定理 である.

④ から ③ の定理を 証明 できる

⑤ 逆写像定理. 連続な

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{l} s < t \\ \Rightarrow f(s) < f(t) \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \mathbb{R} \text{ は 狭義の}$$

単調増加 であるとする.

$$\left(\begin{array}{l} s < t \\ \Rightarrow f(s) < f(t) \end{array} \right)$$

$$f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

は 全単射で 逆写像が

$$g: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

は 連続関数 である.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

5

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

定理

$$f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

各点 x 附近 f 可微

$\Rightarrow f$ は各点 x 連続

$$f(t) \rightarrow f(a)$$

$$(t \rightarrow a)$$

clear + nice graph! 結構親切な図.

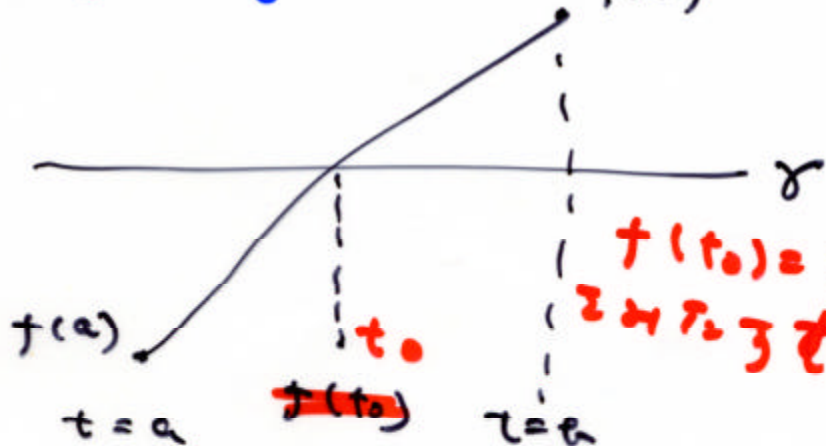
逆方向も可.

$$\textcircled{\text{例}} \quad s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$$

$$\textcircled{\text{例}} \quad s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$$

中間値の定理の
逆定理は

$$[f(a), f(b)] \subset \mathbb{R}$$



$$f(t_0) = y$$

247.3 2.0 2.1

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$



④ 単言増加, 各点で微分可能
(特に連続)



$$f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$$

⑤ $g: [f(A), f(B)] \rightarrow [A, B]$

$$y = f(x), \quad x = g(y)$$

逆関数
fの逆関数を

$$y \in (f(A), f(B))$$

$$y \rightarrow \gamma$$

$$g'(y) \leftarrow \frac{g(y) - g(\gamma)}{y - \gamma} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)}$$

$$x = g(y)$$

$$c = g(\gamma)$$

$$y = f(x)$$

$$\gamma = f(c)$$

結果

$$\downarrow \frac{1}{f'(c)}$$

$$y \rightarrow \gamma \quad \begin{array}{c} x \\ \parallel \\ g(y) \end{array} \rightarrow g(\gamma) \quad \begin{array}{c} c \\ \parallel \\ c \end{array}$$

gの連続性
(逆関数定理)

$$\downarrow x \rightarrow c$$

$$f'(c)$$

3.1.1

7

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\left(\begin{array}{l} f(x) = x \\ c = g(x) \end{array} \right) \text{ is the case.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

(134)

$$\begin{array}{ccc} f: (0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \\ & & \text{"} y \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} (0, +\infty) & \longleftrightarrow & (0, +\infty) \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}} \longleftrightarrow y \quad \text{cubic root.}$$

$$y = x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{3x^2}$$

$$x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 \\ &= y^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{(\sqrt[3]{t})' = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}}$$

$$(t^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} t^{\frac{1}{3}-1}$$

$$y = x^n \quad (x > 0) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$x = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} \quad \text{the } n\text{th root}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

$$x = y^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{Formula} \quad \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$(\sqrt[n]{t})' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{t} \sqrt[n]{t}$$

$$(t^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}$$

$$y = (1+3t)^n$$

$$f(x) = x^n$$

$$= f(u(t))$$

$$x = u(t) = 1+3t$$

(9)

合成関数 composed function?

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$\frac{f(u(t)) - f(u(a))}{t - a} = \boxed{\frac{f(x) - f(A)}{x - A}} \cdot \boxed{\frac{u(t) - u(a)}{t - a}}$$

$\uparrow$ $f'(A)$ $\uparrow$ $u'(a)$

$$x = u(t)$$

u : 変数変換

$$A = u(a) \text{ と } x \rightarrow$$

$\rightarrow$ 連続性

従, $t \rightarrow a$ $u(t) \rightarrow u(a)$

$$\frac{d}{dt} f(u(t)) = f'(u(t)) \cdot u'(t) \quad x \rightarrow A$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

(134)

$$y = (1+3t)^n = x^n$$

$$x = 1+3t$$

$\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = 3$
 $\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$
 $\frac{dy}{dt} = 3n x^{n-1}$

$$\frac{dy}{dt} = n x^{n-1} \cdot 3$$

$$= n(1+3t)^{n-1} \cdot 3 \leftarrow t \text{ は } \frac{dx}{dt}$$

$$= 3n(1+3t)^{n-1}$$

1. 5 2 t

(10)

$$(1) \quad y = (1-2x)^5$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{(3x-2)^5}$$

$$(3) \quad y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^4$$

$$(4) \quad y = x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^2$$

$$\left(\frac{4}{5}\right) \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$