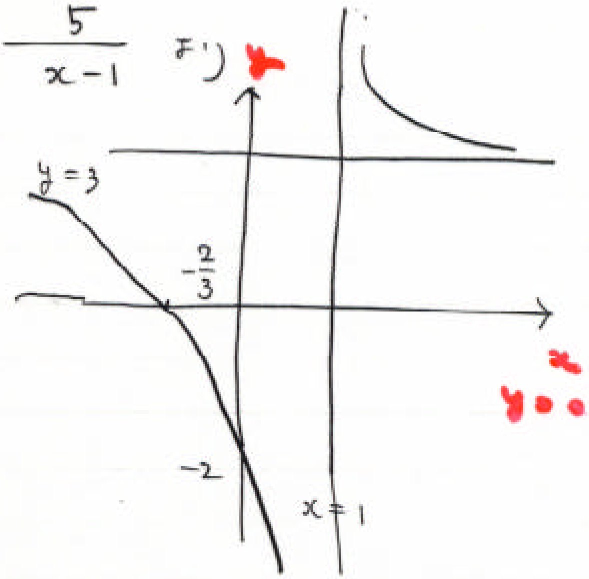
5月12日(水) 小テスト解答

I $y = \dfrac{3x+2}{x-1}$ のグラフを描け

$$y = \frac{3(x-1)+5}{x-1} = 3 + \frac{5}{x-1}$$ より



$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

II $y = \dfrac{1}{x+1}$ の $x = a\ (\neq 1)$ における微分係数を求めよ

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{a+h+1} - \frac{1}{a+1}}{h} = \frac{(a+1) - (a+h+1)}{h(a+1)(a+h+1)}$$ "$-h$"

$h \neq 0$

$$= \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(a+1)(a+h+1)} = \boxed{-\frac{1}{a+1}} \times \frac{1}{a+1+h}$$ $\frac{1}{a+1}$

$$\longrightarrow -\frac{1}{(a+1)^2} \quad (h \to 0)$$

$a+1$

$a+1+0$ "$=a+1$"

より

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

$f(x) \to A,\ g(x) \to B\ (x \to \alpha)$

1) $f(x) \pm g(x) \to A \pm B$

2) $f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$

3) $\dfrac{1}{f(x)} \longrightarrow \dfrac{1}{A}$

calc14

2

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = ?$$

$a>0$ のとき

III
$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}}{h} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\cdot h}$$

通分

分子の有理化

$$= \frac{\overbrace{a-(a+h)}^{=-h}}{\sqrt{a+h}\cdot\sqrt{a}\cdot h\,(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt{x}\to\sqrt{a}\\ (x\to a)\end{array}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{\sqrt{a+h}} \times \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{a\sqrt{a}}$$

を得る。このことから

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

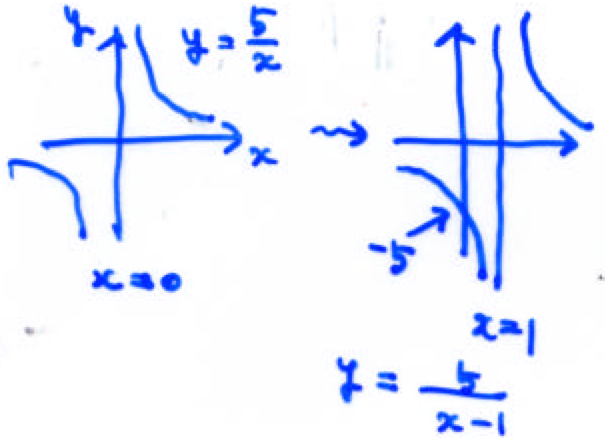
$$-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2} - 1$$

すなわち

$$\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

を得る。

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{\alpha-1}}$$ にあっている。



$3x + 2 = 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to f'(a) \quad (h \to 0)$$

微分の公式

$$(3x^2 + 2x + 1)' = 3 \cdot (x^2)' + 2(x)' + (1)'$$
$$= 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 + 0$$
$$= 6x + 2$$

---

(0) $(c f(x))' = c f'(x)$ 　 c : 定数

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(2) $(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$ 　(Leibniz)

(3) $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

「f(x)が $x=a$ で微分できるとする。」

これはどういう意味か。

理解するためには、「できない」ことを考える。

$y=|x|=f(x)$

$x=0$ で微分できない

$h<0 \quad |h|=-h$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$h_n<0 \quad h_n \to 0$

$$\frac{-h_n}{h_n} = -1 \to -1$$

$h>0 \quad |h|=h$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$h_n>0 \quad h_n \to 0$

$$\frac{h_n}{h_n} = 1 \to 1$$

$\rightsquigarrow$ $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ の極限なし $(h \to 0)$

$\rightsquigarrow$ $x=0$ で 微分できない

f(x)が $x=a$ で微分できる。

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ が存在}$$

定理 $f(x)$が $x=a$ で微分可能であるとする

$$f(x) \longrightarrow f(a) \quad (x \to a)$$

($x=a$で fは連続)

(証明)

$$f(x)-f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a)$$

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a) + f(a)$$

$$\longrightarrow f'(a) \times 0 + f(a) = f(a)$$

(0) $$\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} = c \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(c:定数) $$\longrightarrow c \times f'(a)$$

(1) 省略 → 面之頁.

(2)

$$\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$= \frac{\{f(x)g(x) - \underline{f(x)\cdot g(a)} + \underline{f(x)g(a)} - f(a)g(a)\}}{x-a}$$

$$= f(x) \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\longrightarrow f(a) \times g'(a) + g(a) \times f'(a)$$

(3) 省略.

434

$$\{(x^2+1)(3x+2)\}' \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

$$= (x^2+1)'(3x+2) + (x^2+1)(3x+2)'$$

$$= 2x(3x+2) + 3(x^2+1)$$

$$= 9x^2 + 4x + 3.$$

$$(f^2)' = 2ff'$$

合成関数の微分法でもできる.

$$(f \cdot f)' = f'f + ff' = 2ff'$$

$$\{(x^4+1)^2\}' = 2(x^4+1)(x^4+1)'$$

$$= 2(x^4+1)\cdot 4x^3$$

$$= 8x^3(x^4+1)$$

$$(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$$

$$\parallel$$

$$(f_1 f_2)' f_3 + (f_1 f_2) f_3' \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

$$= (f_1' f_2 + f_1 f_2') f_3 + f_1 f_2 f_3'$$

$$= f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$$

特に $f_1 = f_2 = f_3 = f$ のとき

$$\boxed{(f^3)' = 3f^2 \cdot f'}$$

$(x)' = 1.$ $\quad (x^1)' = 1 \times x^0 = 1 \cdot x^{1-1}$

$(x^n)' = n x^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

→ $n=1$ ok.

$(fg)' = f'g + fg'$

n: ok とする.

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)'$$
$$= (x)' \cdot x^n + x \underbrace{(x^n)'}$$
$$= 1 \cdot x^n + x \cdot \underbrace{n x^{n-1}}$$

帰納法の仮定

$$= (n+1) x^{n} \quad \underbrace{n+1-1}$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}.$ 既に示した.

$x^n \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{n-1} \frac{x}{\sqrt{x}}$

$$(x^n \sqrt{x})' = (x^n)' \sqrt{x} + x^n \cdot (\sqrt{x})'$$
$$= n x^{n-1} \cdot \sqrt{x} + x^n \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$= n x^{n-1} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \boxed{x^{n-1} \sqrt{x}}$$
$$= \left(n + \frac{1}{2}\right) x^{n-1} \sqrt{x}.$$

$\underbrace{x^{n-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}}$

$$(x^{n+\frac{1}{2}})' = \left(n + \frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}}$$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$\boxed{n + \frac{1}{2} - 1 = n - \frac{1}{2}}$

松葉香子

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}}$$

$$\begin{aligned}(左) &= g' \cdot \frac{1}{f} + g \cdot \left(\frac{1}{f}\right)' \\ &= g' \cdot \frac{1}{f} + g\left(-\frac{f'}{f^2}\right) \\ &= \frac{g'f - gf'}{f^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)' &= \frac{(x)'(x^2+x+1) - x(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - x \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)' &= \frac{\overset{3}{\overset{\shortparallel}{(3x+2)'}}(x-1) - (3x+2)\overset{1}{\overset{\shortparallel}{(x-1)'}}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3(x-1) - (3x+2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-5}{(x-1)^2} < 0 \quad (x+1)\end{aligned}$$

I 次の関数を微分せよ.

(1) $(3x+2)x^2$.

(2) $\sqrt{x}(3x-1)$

(3) $\dfrac{3x-1}{\sqrt{x}}$ $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(4) $\dfrac{x-1}{x^2+1}$

II $x \neq 1$ とする.

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

の両辺を微分して

$$1 + 2\cdot x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

を求めよ.