

calc (1)

4月28日(水) 3,4限 1.テスト解答

I (1) $|r| < 1$ a.e.

TRES FACILE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-r^n}{1+r^n}$$

を求めよ.

(2) $|r| > 1$ a.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^n}$$

を求めよ.

(1) $|r| < 1$ a.e. $r^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$)

に注意. (ε). 332

$$\frac{1-r^n}{1+r^n} \longrightarrow \frac{1-0}{1+0} = 1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

(2) $|r| > 1$ a.e. $R = \frac{1}{r}$ は $|R| < 1$ を得る.

$$\frac{1-r^n}{1+r^n} = \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} = \frac{R^n - 1}{R^n + 1} \longrightarrow \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$\text{II} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 6n + 1}{2n^2 + 5n - 4} = \frac{3 - 6\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + 5\frac{1}{n} - 4\frac{1}{n^2}}$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$\longrightarrow \frac{3 - 6 \times 0 + 0}{2 + 5 \times 0 - 4 \times 0} = \frac{3}{2} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

calc (2)

Ⅲ $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{4}{3}$ 2" 定義した数列 $\{a_n\}$

1: 証明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 2 存在.

特性方程式は $\lambda = \frac{1}{3} \lambda + \frac{4}{3}$ 2" あり, 解いて $\lambda = 2$
 2" 得る. 2" あり $\lambda = 2$ 2" あり $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{4}{3}$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{3} (a_n - 2)$$

2" $\{a_n - 2\}$ 12 公比 $\frac{1}{3}$

2" 等比数列 2" あり. $\Rightarrow a_n = 2 + \dots$

$$a_n - 2 = \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - 2)$$

2" $\{a_n - 2\}$

$$a_n = 2 + \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\rightarrow 0} (a_0 - 2) \rightarrow 2 + 0 \times (a_0 - 2) = 2$$

$a_0 - 2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n - 2$
 $\uparrow$
 $\frac{1}{3}$ step.

2" $\{a_n\}$.

証明

① 注

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 2" 存在する 2" 1 仮定する 2"

$\{a_n\}$ 0" 42 あり $\Rightarrow$ 2" 仮定.

$$\alpha \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{4}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \alpha + \frac{4}{3}$$

2" 両辺 α 2" 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \frac{1}{3} \alpha + \frac{4}{3}$$

2" $\{a_n\}$. $\Rightarrow$ 2" $\alpha = 2$ 2" $\{a_n\}$.

例 7

$$|k| < 1$$

$$k^n \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$n k^n \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$n^2 k^n \longrightarrow 0 \quad (|k| < 1)$$

$$a_n \rightarrow \alpha, \quad b_n \rightarrow \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) a_n \pm b_n \longrightarrow \alpha \pm \beta$$

$$2) a_n \cdot b_n \longrightarrow \alpha \beta$$

$$a_n \neq 0, \quad \alpha \neq 0 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$3) \frac{1}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}$$

$$(n \in \mathbb{R} = \mathbb{R} \text{ 式})$$

$$(n \in \mathbb{R} = \mathbb{R} \text{ 式})$$

$$\longrightarrow \text{定数} \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$(n \in (\mathbb{R}-1) = \mathbb{R} \text{ 式})$$

$$n \in \mathbb{R} = \mathbb{R} \text{ 式}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

微分係数

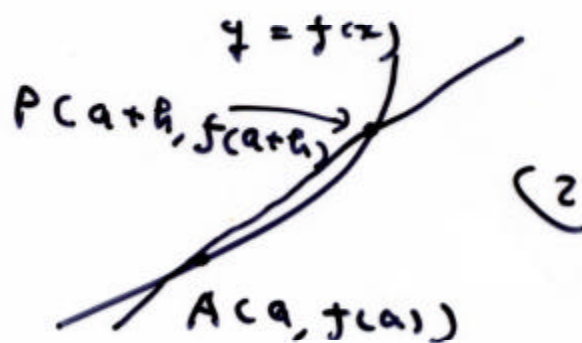
直線 AP , $h \in \mathbb{R}$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\longrightarrow f'(a) \leftarrow$$

($h \rightarrow 0$)
 極限 $h \rightarrow 0$ として微分係数を求める



$P \rightarrow A$ AP の極限

$\longrightarrow A$ に近づく
 直線 AP の極限
 $x = a$ に近づく
 微分係数を求める

① $f(x) = x^n$

x to the power of n
 n th power of x

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$= \frac{1}{h} \{ \underbrace{a^n} + \underbrace{n c_1 h a^{n-1}} + \underbrace{n c_2 h^2 a^{n-2}} + \dots$$

↑
 二項定理

$$+ \dots + n c_{n-1} h^{n-1} a + h^n) - a^n \}$$

$$= n c_1 a^{n-1} + n c_2 h a^{n-2} + \dots + n c_{n-1} h^{n-2} a + h^{n-1}$$

$h \rightarrow 0$

$$\longrightarrow \underbrace{n c_1}_{=n} a^{n-1} = n a^{n-1}$$

⑥

$$y = f(x) = x^4$$

$1\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{(a+h)^4 - a^4}{h} \\ & \xrightarrow{\text{二项式定理}} \frac{1}{h} (a^4 + \underbrace{4C_1 a^3 h}_{=4} + \underbrace{4C_2 a^2 h^2}_{=6} + \underbrace{4C_3 a h^3}_{=4} + \underbrace{h^4}_{\text{③}} - \underbrace{a^4}_{\text{④}}) \\ & = 4a^3 + 6a^2 h + 4a h^2 + h^3 \end{aligned}$$

$$h_n \rightarrow 0. \text{ ③.}$$

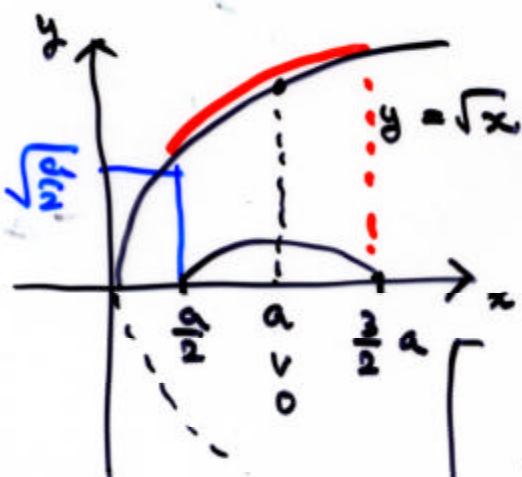
$$\begin{aligned} & 4a^3 + 6a^2 h_n + 4a h_n^2 + h_n^3 \\ & \rightarrow 4a^3 + 6a^2 \times 0 + 4a \times 0^2 + 0^3 \\ & = 4a^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{(x^4)' = 4x^3}$$

$$y = \sqrt{x} \leadsto x = y^2$$

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \rightarrow ?$$

(3)



$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h}{\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{a} \\ & x \rightarrow a \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} & x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow +\infty) \\ & x_n \neq a \quad \{x_n\} \text{ is s.t.} \\ & \sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{a} \end{aligned} \right. \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\frac{a}{2} < x < \frac{3}{2}a \quad \text{is s.t.}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\begin{aligned} & a > 0 \\ & \Rightarrow \sqrt{a} > 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x} > \sqrt{\frac{a}{2}} \quad \text{is s.t.}$$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1)\sqrt{a}} \times |x - a|$$

$$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow +\infty) \quad \left(\frac{a}{2} < x_n < \frac{3}{2}a \right) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & 0 < |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| < \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1)\sqrt{a}} \times |x_n - a| \\ & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \text{by 12.2435.} \\ & 0 \quad \quad \quad 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |x_n - a| \\ & \downarrow \\ & 0 \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

証明 3.2.13

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

(2.2.2.3.3)

(4)

$$a_n \rightarrow \alpha, c_n \rightarrow \alpha$$

$$\Rightarrow b_n \rightarrow \alpha$$

証明 $|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$

$(x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow +\infty) \quad a \in \mathbb{R})$

$-|A| \leq A \leq |A|$

$$-|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| \leq \sqrt{x_n} - \sqrt{a} \leq |\sqrt{x_n} - \sqrt{a}|$$

$$\downarrow$$

0

$$\downarrow$$

$n \rightarrow +\infty$
0 (2.2.2.3.3.)

$$\downarrow$$

0

$\hookrightarrow \sqrt{x_n} - \sqrt{a} \rightarrow 0$

$$\sqrt{x_n} = \sqrt{x_n} - \sqrt{a} + \sqrt{a}$$

$$\rightarrow 0 + \sqrt{a} = \sqrt{a}.$$

証明 3.2.13

$$\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a} \quad (x \rightarrow a)$$

証明 3.2.13

$$x = a + h$$

(5)

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\cancel{x-a}}{(\cancel{x-a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$x_n \rightarrow a \quad \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{x_n} \rightarrow \sqrt{a}$$

$$\sqrt{x_n} + \sqrt{a} \rightarrow 2\sqrt{a}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

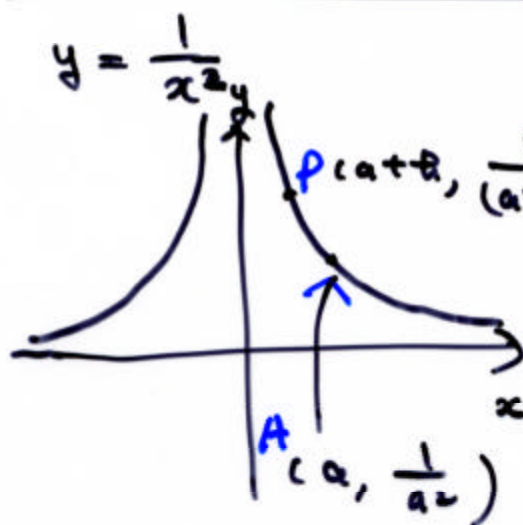
例 1 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

例 2 $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \quad -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1$

$$\boxed{-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1}$$

一般化 $(x^a)' = a x^{a-1}$

例 3 $(x^a)' = a x^{a-1}$



$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2} \\ &= \frac{a^2 - (a+h)^2}{(a+h)^2 a^2} \\ &= \frac{-2ah - h^2}{(a+h)^2 a^2} \end{aligned}$$

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

$$= \frac{-2a - \cancel{h_n}}{a^2} \times \frac{1}{(a + \cancel{h_n})^2} \quad \boxed{h_n \rightarrow 0, h \rightarrow +\infty} \quad (6)$$

$$\frac{-2a - \cancel{h_n}}{a^2} \times \frac{1}{(a + \cancel{h_n})^2}$$

$$\rightarrow \frac{-2a}{a^2} \times \frac{1}{(a+0)^2} = \frac{-2}{a^3}$$

公式

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

例

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

これは重要.

$$(f(x) \pm g(x))' = ?$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = ?$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = ?$$

公式重要.

相対的な公式

$$f: (a-\delta, a+\delta) \cup (a, a+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a-\delta \quad \textcircled{a} \quad a+\delta$$

$$g: \text{同型}$$

N.B.

f と g は a での定義域を共有する.

noter bien

(7)

仮定 $f(x) \rightarrow A, g(x) \rightarrow B$
 $(x \rightarrow a)$

とす。

$$f(x) \pm g(x) \longrightarrow A \pm B.$$

② $f(x) \cdot g(x) \longrightarrow A \cdot B.$

$$f(x) \neq 0, A \neq 0 \text{ かつ } a \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{1}{f(x)} \longrightarrow \frac{1}{A}.$$

※ 第254頁の定理と同様に
 $\Rightarrow$ 254, 253

証明 Une Explication

極限の定義

$x_n \rightarrow a$ とす。 $f(x_n) \rightarrow A.$
 $g(x_n) \rightarrow B.$ とす。

$$f(x_n) \cdot g(x_n) \longrightarrow AB$$

$\Rightarrow$ したがって $f(x) \cdot g(x) \longrightarrow AB$
 $(x \rightarrow a)$

$$y = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2}$$

$$= 2 + \frac{1}{x-2}$$

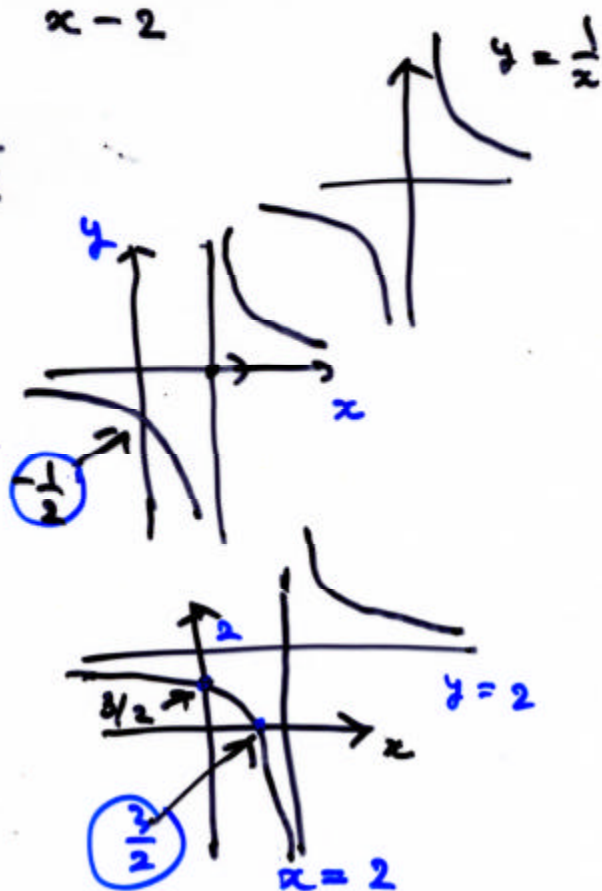
$$y = \frac{1}{x-2}$$

↓

$$y = \frac{1}{x-2} + 2$$

$$= \frac{2x-3}{x-2}$$

$$= 0 \leadsto x = \frac{3}{2}$$



I $y = \frac{3x+2}{x-1}$ のグラフを求めよ。

II $y = \frac{1}{x+1}$ の $x=a$ ($a \neq -1$) に点を通る直線の方程式を求めよ。

$$\frac{\frac{1}{a+h+1} - \frac{1}{a+1}}{h} \rightarrow ? \quad (h \rightarrow 0)$$

III $a > 0$ とし $\sqrt{a+h} \rightarrow \sqrt{a}$ ($h \rightarrow 0$) として $\frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{h} \rightarrow ?$ ($h \rightarrow 0$)

$\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{a}$ ($x \rightarrow a$) として $\frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{x-a} \rightarrow ?$ ($x \rightarrow a$)