①

$$a_{n+1} = 3a_n - 3 \longleftrightarrow$$

$\{a_n - \lambda\}$ 等比数列とするように

$$\lambda = 3\lambda - 3$$

$$2\lambda = +3$$

$$\lambda = +\frac{3}{2}$$

$$-)\ \underset{=\lambda}{\frac{3}{2}} = 3 \times \underset{=\lambda}{\frac{3}{2}} - 3$$

$$a_{n+1} - \frac{3}{2} = 3\left(a_n - \frac{3}{2}\right)$$

$\{a_n - \frac{3}{2}\}$ は公比 3 の等比数列.

$$a_n - \frac{3}{2} = 3^n\left(a_0 - \frac{3}{2}\right)$$

$$a_n = \frac{3}{2} + 3^n\left(a_0 - \frac{3}{2}\right)$$

$$a_{n+1} = -2a_n + 1 \longleftrightarrow \lambda = -2\lambda + 1$$

$$3\lambda = 1 \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

$$-)\ \lambda = \frac{1}{3} = -2 \times \underset{=\lambda}{\frac{1}{3}} + 1$$

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = (-2)\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

$\{\underbrace{a_n - \frac{1}{3}}_{= b_n}\}$ は公比が (-2) の等比数列

$$a_n - \frac{1}{3} = (-2)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{3} + (-2)^n\left(a_0 - \frac{1}{3}\right)$$

② 数列の極限の基本

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ とも言う.

$a_n \longrightarrow \alpha,\ b_n \longrightarrow \beta \quad (n \longrightarrow +\infty)$

$a_n \pm b_n \longrightarrow \alpha \pm \beta.$

$a_n \cdot b_n \longrightarrow \alpha \cdot \beta.$

$a_n \neq 0,\ \alpha \neq 0 \quad \dfrac{1}{a_n} \longrightarrow \dfrac{1}{\alpha}.$

$\boxed{\dfrac{b_n}{a_n} \longrightarrow \dfrac{\beta}{\alpha}}$

① $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \longrightarrow 1+0 \quad (n \to +\infty)$

② $\dfrac{4n+3}{3n-1} = \dfrac{4+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}} \longrightarrow \dfrac{4+0}{3-0} = \dfrac{4}{3}$

$\boxed{\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty) \quad \text{基本}}$

constant

$\dfrac{3}{n} \longrightarrow 3 \times 0 = 0$

$c, c, c, c, \cdots \longrightarrow c$

③ $\dfrac{n^2-1}{n^2+2} = \dfrac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}} \longrightarrow \dfrac{1-0}{1+0} = 1$

$\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n} \to 0 \times 0 = 0$

④ i) $|r|<1$ のとき

$\dfrac{1}{2+r^n} \longrightarrow \dfrac{1}{2+0} \quad (|r|<1)$

$\boxed{|r|<1 \Longrightarrow r^n \to 0 \quad (n \to +\infty)}$

ii) $|r|>1$ とする $\leadsto$ $R = \dfrac{1}{r}$ とおくと $\boxed{|R|<1}$

$R^n \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$

$\dfrac{1}{2+r^n} = \dfrac{\frac{1}{r^n}}{2\times\frac{1}{r^n}+1} = \dfrac{R^n}{2\times R^n+1} \longrightarrow \dfrac{0}{2\times 0+1} = 0$

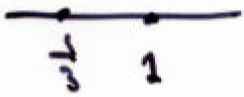
$r=1$ のとき $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \cdots \longrightarrow \dfrac{1}{3}$

③ $r=-1$

$n=0 \quad n=1 \quad n=2$

$\frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \cdots$

収束しない



基本定理2

$a_n \to \alpha,\ b_n \to \alpha$

$a_n \leq c_n \leq b_n$ (全てのn)

$\Rightarrow\ c_n \to \alpha.$ (はさみうち)

例4 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$

$n=1 \quad n=2 \quad n=3 \quad n=4$

$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

$-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$

$(-1)\times 0 = 0 \qquad \to 0 \qquad \to 0$

例 $a_n = \frac{\cos n\theta}{n}$ (θ:定数)

$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n\theta}{n} \leq \frac{1}{n}$

$0 \qquad \to 0 \qquad \to 0$

$|r|<1 \quad -|r|^n \leq r^n \cos n\theta \leq |r|^n$

$0 \qquad \to 0$

④ 数列 une suite , a series

$a_0, a_1, a_2, \dots$

une série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ SERIE A

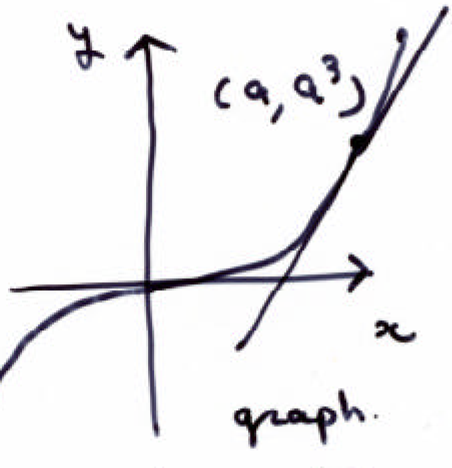
級数

微分 $y = x^3$

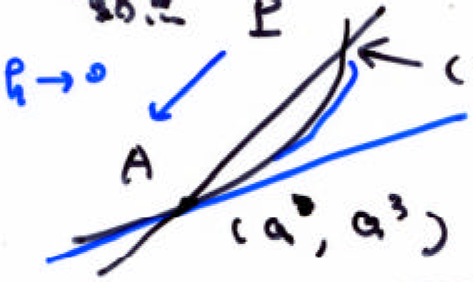
(a, a^3) における接線

$y' = 3x^2$

$y = 3a^2(x-a) + a^3$



動点 P



$(a+h, (a+h)^3)$

$h \neq 0$

(a, a^3)

(接線の傾き)

直線APの傾き $= \dfrac{(a+h)^3 - a^3}{(a+h) - a}$

$= \dfrac{(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) - a^3}{h} =$

$= 3a^2 + 3ah + h^2 \longrightarrow 3a^2$

$(h \to 0)$

$\boxed{h_n \to 0 \text{ とする 数列}}$

$3a^2 + \underbrace{3a h_n}_{\to\, 3a \times 0 = 0} + h_n^2 \longrightarrow 3a^2 + 3a \times 0 + 0^2$

$= 3a^2$

$h_n^2 \to 0 \times 0 = 0$

⑤

極限の話.

$c>0$

$$f : (a-c, a) \cup (a, a+c) \to \mathbb{R}$$

cup

和集合

$\mathbb{R}$: 実数全体の集合.

a set

un ensemble

開区間

(α, β)

$]\alpha, \beta[$

閉区間

$[\alpha, \beta]$

fの定義域

domain

定義 $f : (a-c, a) \cup (a, a+c) \to \mathbb{R}$ 値域

$f(x) \to A \quad (x \to a)$

$\left(\begin{array}{l} a-c \leqq a_n \leqq a+c,\ a_n \neq a \\ \quad a_n \to a \end{array}\right.$ → $\boxed{f(a_n)\text{ が定義されるため}}$

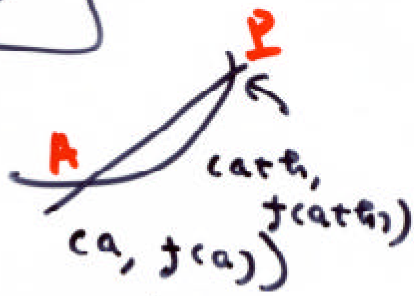
ならば $f(a_n) \to A$. となる

$(n \to +\infty)$

$$f(x) = x^2 + Ax + B$$

$$\boxed{f'(x) = 2x + A}$$

APの傾き



$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

$$= \frac{\{(a+h)^2 + A(a+h) + \cancel{B}\} - (a^2 + Aa + \cancel{B})}{h}$$

$$(a+h)^2 - a^2$$
$$= a^2 + 2ah + h^2 - a^2$$
$$= 2ah + h^2$$

$$= \frac{(2ah + h^2) + Ah}{h}$$

$$= 2a + h + A$$

$$= (2a + A) + h$$

$$h_n \neq 0$$
$$h_n \to 0$$

$$(2a + A) + h_n$$
$$\longrightarrow (2a + A) + 0 = 2a + A$$

$$f'(a) = 2a + A$$

$y = f(x)$ の $x = a$ における
微分係数.

⑦ 小テスト

le 28 Avril, 04

I (1) $|r| < 1$ のとき

$$\frac{1-r^n}{1+r^n}$$ の極限

$$\frac{x}{y}$$

x over y.

x sur y

(2) $|r| > 1$ のとき.

$$\frac{1-r^n}{1+r^n}$$ の極限

II $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-6n+1}{2n^2+5n-4}$$

III $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{4}{3}$ で定義される数列の極限を求めよ.

$$\lambda = \frac{1}{3}\lambda + \frac{4}{3}$$