

微分積分演習 6月28日

(I) 関数

xとyについて3次式.

$$z = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

の停留点を求めましょう。

$z_x = z_y = 0$ が必要

偏導関数は

$$z_x = y \{ 1 \cdot (x^2 + y^2 + 1) + x \cdot 2x \}$$

$$= y(3x^2 + y^2 + 1) = 0$$

$$z_y = x \{ 1 \cdot (x^2 + y^2 + 1) + y \cdot 2y \}$$

$$= x(x^2 + 3y^2 + 1) = 0$$

$z_y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

と計算されます。 $3x^2 + y^2 + 1, x^2 + 3y^2 + 1 > 0$ ですから

$AB=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ or } B=0$

$$z_x = z_y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

が従います。

(II) 曲線

$$x^4 + y^4 - 4xy = 0$$

の上の点の近くで $y = \varphi(x)$ と解くことが出来るとします。このとき $\varphi'(x)$ を x と $\varphi(x)$ で表してください。

$$\begin{aligned} \frac{du^4}{dx} &= \frac{du^4}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= 4u^3 \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

点 $(x, \varphi(x))$ が曲線 $x^4 + y^4 - 4xy = 0$ 上にありますから

$$x^4 + \varphi(x)^4 - 4x\varphi(x) = 0$$

常に成立.

が成立します。この両辺を x で微分すると

$$4x^3 + 4\varphi(x)^3\varphi'(x) - 4\varphi(x) - 4x\varphi'(x) = 0$$

となりますが、これを $\varphi'(x)$ について解くと

$$\varphi'(x) = \frac{x^3 - \varphi(x)}{x - \varphi(x)^3}$$

となる。

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x^3 - \varphi(x)}{x - \varphi(x)^3} \\ &= \frac{x^3 - \varphi(x)}{x - \varphi(x)^3} \end{aligned}$$

$$g(x, y) = 0$$

$$(a, b)$$

(補足) 一般に $g(x, y) = 0$ の上の点 (a, b) における接線が

$$0 \text{ と } \neq$$

$$g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b) = 0$$

であることから、 (a, b) の近くで曲線を $y = \varphi(x)$ と

表示すると $y = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}(x - a) + b$

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$$

が成立することが分かります。この問題の場合

$$g(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$g_x = 4x^3 - 4y, \quad g_y = 4y^3 - 4x$$

とおくと

$$g_x = 4x^3 - 4y, \quad g_y = 4y^3 - 4x$$

から

$$\varphi'(x) = \frac{x^3 - \overset{g(x)}{y}}{x - \overset{g(x)}{y^3}}$$

を得ます。

(補足) 一般に曲線

$$g(x, y) = 0$$

上の点 (a, b) の近くで

$$y = \varphi(x)$$

と解くことができる十分条件として

$$g_y(a, b) \neq 0$$

があります (陰関数定理)。

(例)

$$g = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$



$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$g_x = 2x$$

$$g_y = 2y$$

$x=0$ は解ける

が $y=0$ は解けない

上の例で、この条件を満たさない点がある点か考えましょう。

$$g = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$g_y = 4y^3 - 4x = 0$$

$$\rightarrow x = y^3 \quad (1)$$

と

$$g = x^4 + y^4 - 4xy = 0 \quad (2)$$

の両方を満たす点を求めましょう。(1)から得られる $x = y^3$ を(2)の y^3 に代入すると

$$x^4 - 3xy = 0$$

を得ますが、この条件は $x = 0$ または $x^3 - 3y = 0$ と同値です。 $x = 0$ のときは(1)から $y = 0$ が従います。他方、 $x^3 - 3y = 0$ のときは $x = y^3$ に代入すると

$$y^9 - 3y = 0$$

から $y = 0, \pm \sqrt[8]{3}$ を得ます。(1)から、それぞれ

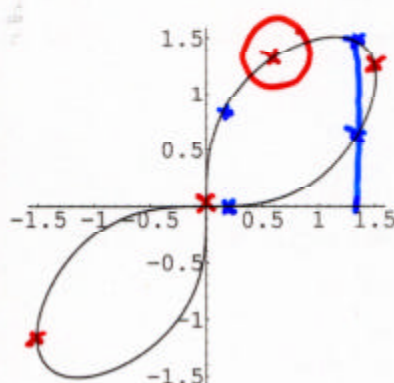
$$x = 0, \pm 3^{\frac{3}{8}}$$

$$(0, 0), (\pm \sqrt[8]{3}, \pm \sqrt[8]{3})$$

補足 11 12

$$g_y \neq 0 \rightarrow y = g(x)$$

$$x \mapsto y$$



Implicit Plot

$$x = 0 \text{ or } x^3 = 3y$$

$$x^3 = 3y$$

$$y = 0 \text{ or } y^8 = 3$$

を得ます。以上で、求める点は

$$(x, y) = (0, 0), (\sqrt[8]{3}, 3^{\frac{3}{8}}), (-\sqrt[8]{3}, -3^{\frac{3}{8}})$$

となります。

(III) 曲線 ⑩

$$(e^t)' = e^t$$

$$z = e^{2x-3y}$$

の $(0, 0, 1)$ における接平面を求めましょう。

$$z = g(x, y) \Rightarrow (a, t, g(a, t)) \text{ における接平面}$$

$$z = g_x(a, t)(x-a) + g_y(a, t)(y-t) + g(a, t)$$

$$z_x = e^{2x-3y} \cdot 2, \quad z_y = e^{2x-3y} \cdot (-3)$$

より

$$z_x(0, 0) = 2, \quad z_y(0, 0) = -3$$

を得ます。これから

$$z = 2x - 3y + 1$$

が求める接平面の方程式となります。



I: $\mathbb{R}$ の 1 次式 z の 停留点 z を求めよ

$$z = x^3 - 9xy + y^3$$

II $z = \frac{y}{1+x^2}$ の $(0, 0, 0)$ に z' 付け

接平面 z を求めよ。

III $x^2y + y^3 - 10 = 0$ の $(1, 2)$ に
おける 接線 z を求めよ

IV $x^2 + xy - y^2 - 1 = 0$ の 角 z を

$y = g(x)$ としよ。

$g'(x), g''(x)$ を x, y で表せ。

(注) これより下は記入してはいけない。