小テスト(6/14)　　　　　　　　　　　　exo 2004

I　$y=t^2\log t$ のグラフ.　　$(fg)'=f'g+fg'$

$(\log t)'=\frac{1}{t}$

$y'=2t\log t+t^2\cdot\frac{1}{t}=2t\log t+t$

$=2t(\log t+\frac{1}{2})$　　$0<2t$

$y''=2(\log t+\frac{1}{2})+2t\cdot\frac{1}{t}=2(\log t+\frac{3}{2})$

より増減表は次のようになる.

t	(0)		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
y'	/	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	/	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	(0)	↘	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{e^3}$	↘	$-\frac{1}{2}\frac{1}{e}$	↗

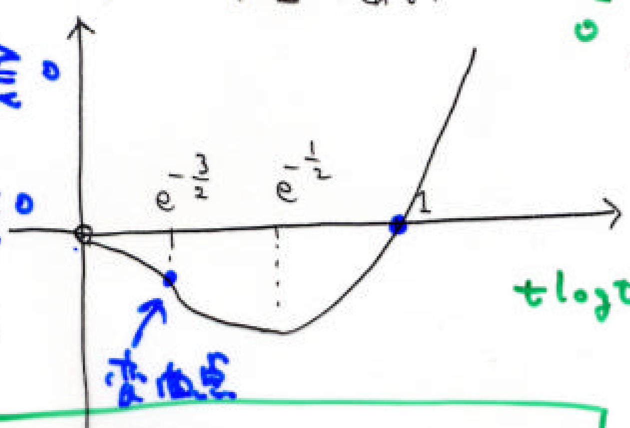
$\log t\to+\infty,\ t^2\to+\infty$

$t\to+\infty$ のとき　$t^2\cdot\log t\to+\infty$

$t\to+0$ のとき　$s=-\log t\to+\infty$ で　($\log t\to-\infty$)

$t^2\log t=e^{-2s}\cdot(-s)=-\frac{s}{e^{2s}}=-\frac{1}{e^s}\cdot\frac{s}{e^s}\to 0\times 0=0$

以上からグラフは下図である.



$t^2>0$

$t^2\log t\gtreqless 0$

$\Updownarrow$

$\log t\gtreqless 0$

$\Updownarrow$

$t\gtreqless 1$

$t^2\log t$

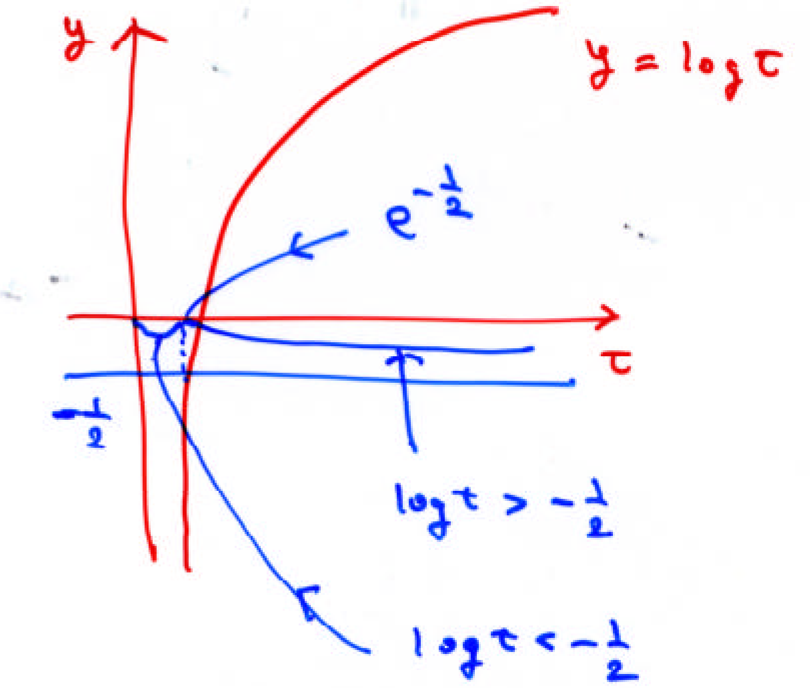
$\to 0\times(-\infty)$

不定形

$t\log t=\frac{\log t}{\frac{1}{t}}$

$\boxed{\frac{t}{e^t}\to 0\ (t\to+\infty)}$

$\boxed{\lim_{t\to+0}t\log t=0}$



$$\boxed{\begin{array}{l} t \to +\infty \ \text{atz} \ \log t \to +\infty \\ t \to +0 \ \text{atz} \ \log t \to -\infty \end{array}}$$

$$\boxed{(e^{ct})' = c\,e^{ct}}$$ c : 定数.

exo 2004

II　$y = t e^{2t}$ のグラフを描け.　　$a^t > 0$

$$y' = (t)' e^{2t} + t(e^{2t})'$$
$$= 1\cdot e^{2t} + t\cdot 2e^{2t} = e^{2t}\boxed{(2t+1)}$$

$$y'' = (e^{2t})'(2t+1) + e^{2t}(2t+1)'$$
$$= 2e^{2t}(2t+1) + 2e^{2t}$$
$$= 2e^{2t}(2t+2) = 4e^{2t}\boxed{(t+1)}$$

$t+1$　$-$　$+$　-1

より下の増減表を得る.

t		-1		$-\frac{1}{2}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	$-e^{-2}$	↘	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}$	↗

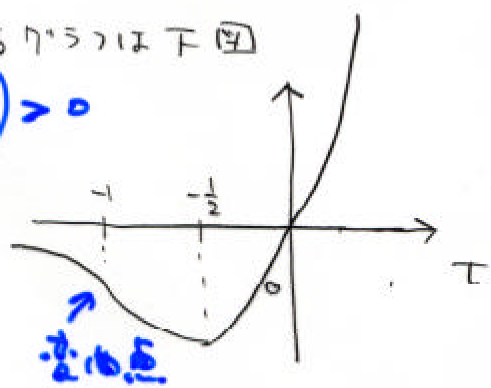
$t \to +\infty$ のとき　$e^{2t} \to +\infty$ より
$$t e^{2t} \to +\infty$$

$t \to -\infty$ のとき　$s = -2t \to +\infty$ で
$$t e^{2t} = -\frac{1}{2} s e^{-s} = -\frac{1}{2}\frac{s}{e^s} \longrightarrow 0$$

以上からグラフは下図

$t\cdot e^{2t} > 0$

符号



0

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} \frac{s}{e^s} = 0}$$

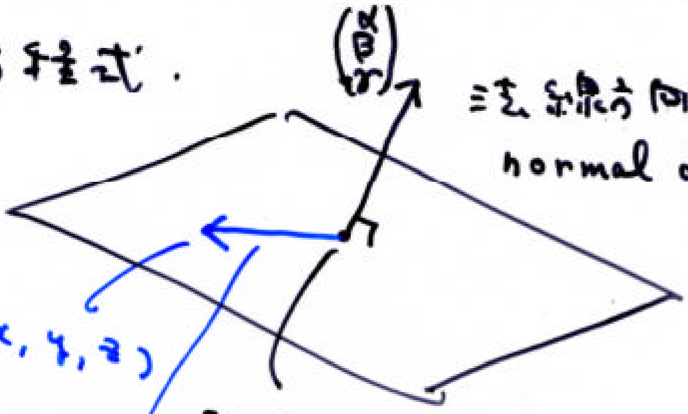
1) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$.

どこで極大・極小か？

2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で

$z = xy$ の極大・極小.

Ⅰ 平面の方程式.



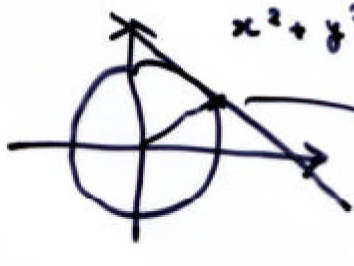
通る点 (a, b, c)

$\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\\ z-c\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x-a\\ y-b\\ z-c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}_{\text{内積}} = 0 \longrightarrow \boxed{\alpha(x-a) + \beta(y-b) + \gamma(z-c) = 0}$$

Ⅱ 陰関数の微分.

(134)



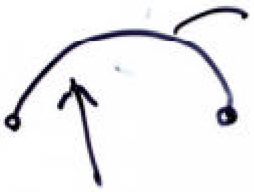
$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ における接線の傾き.

$y > 0$

$y = \sqrt{1 - x^2}$

$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times (-2x) = \cdots$



$y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$

$x^2+y^2-1=0 \rightsquigarrow x^2+g(x)^2-1=0$

$\downarrow$

$2x+2g(x)g'(x)=0$

$-1<x<1$ において
$g(x) \neq 0$

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\varphi(x)^2\right) &= \frac{du^2}{du}\cdot\frac{du}{dt} = 2uu' \\ u=\varphi(x) \quad &= 2\varphi(x)\varphi'(x) \end{aligned}}$$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}$

$$\rightsquigarrow g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Ⅱ $z=f(x,y)=x^2+xy+y^2-4x-2y.$

$$\begin{aligned} z &= f(x,t) \\ &= x^2+tx+t^2-4x-2t \\ &= F(x) \end{aligned}$$

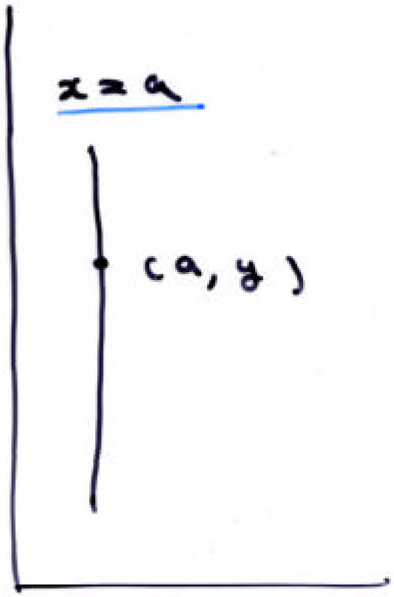
$F'(x) = 2x + t - 4$

xに関する。

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 4}$$

偏微分

$$z = f(x, y)$$
$$= x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$



$$z = a^2 + ay + y^2 - 4a - 2y$$
$$= g(y)$$

$$g'(y) = a + 2y - 2$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 2}$$

yに関する偏微分

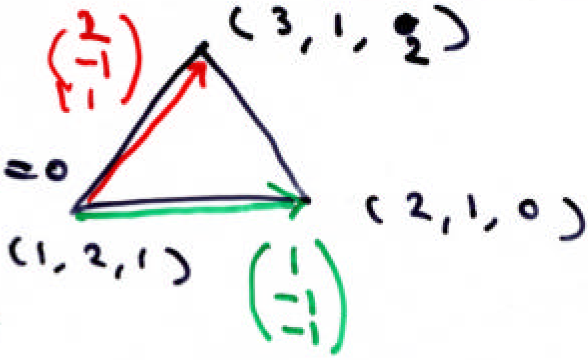
with respect to ~
par rapport à ~

$$z = f(x, y) = \boxed{x^4} + y^4 - \boxed{2x^2} + \boxed{4}\boxed{x}\boxed{y} - 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y$$

I に戻る.



$Ax + By + Cz + D = 0$
すべてにし
A, B, C, D を求める

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直なベクトルは?

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = 0 & \cdots ① \\ \alpha - \beta - \gamma = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

$$(-)\quad \alpha \qquad + 2\gamma = 0$$

α, β を γ で表す.

$$\alpha = -2\gamma, \quad \beta = \alpha - \gamma = -2\gamma - \gamma$$
$$= -3\gamma$$

法線
まい.

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\gamma\\ -3\gamma\\ \gamma\end{pmatrix} = \gamma \boxed{\begin{pmatrix}-2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}}$$

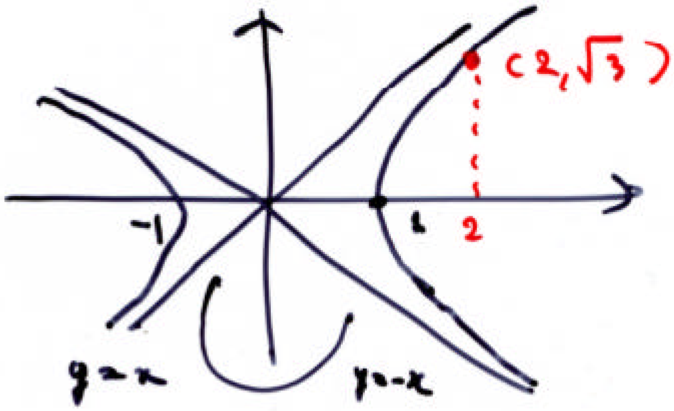
$$(-2)(x-3) + (-3)(y-1) + 1\cdot(z-2) = 0$$

が求める方程式.

(I) 小テスト

$(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$ の
3点を通る平面の方程式を求めよ.

(II) $x^2 - y^2 - 1 = 0$ 上の点 $(2, \sqrt{3})$ を通る
接線のくに直え.



(III) $z = f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 5y^4$ に対して
$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.