

I! fait chand! Silence!

04 8/20

II  $y = t^2 e^{-t}$   $y' = (t^2)' e^{-t} + t^2 (e^{-t})'$

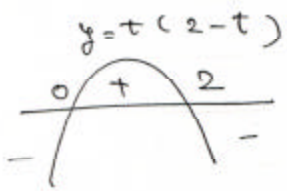
$= 2t e^{-t} + t^2 (-e^{-t})$

$= e^{-t} (2t - t^2)$

$= e^{-t} t(2-t)$

$(e^{ct})' = c e^{ct}$

$a^x > 0$



2) 増減表は下図

|    |   |   |   |                 |   |
|----|---|---|---|-----------------|---|
| t  |   | 0 |   | 2               |   |
| y' | - | 0 | + | 0               | - |
| y  | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ |

$t \neq 0 \quad t^2 > 0 \quad t < 2$

$t^2 e^{-t} > 0$

$t = 0 \quad y = 0$

1/2

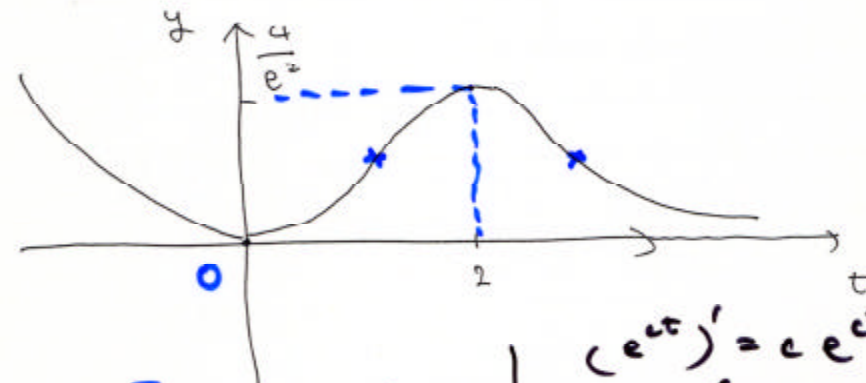
$t \rightarrow +\infty \quad a < 1 \quad \frac{t^2}{e^t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$

$t \rightarrow -\infty \quad a < 1 \quad e^{-t} \rightarrow +\infty$

$-t \rightarrow +\infty \quad t^2 \rightarrow +\infty$

3)  $y = t^2 \cdot e^{-t} \rightarrow +\infty$

2) のグラフは下図



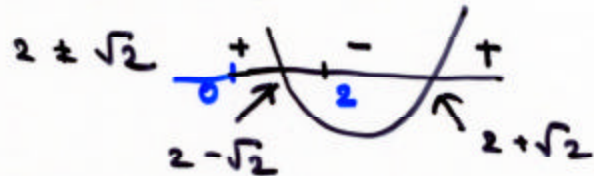
$y' = e^{-t} (2t - t^2)$

$y'' = (e^{-t})' (2t - t^2) + e^{-t} (2t - t^2)'$

$(e^{ct})' = c e^{ct}$   
 $(e^{-t})' = -e^{-t}$

$$\begin{aligned}
 y'' &= -e^{-t}(2t - t^2) + e^{-t}(2 - 2t) \\
 &= e^{-t} \{ (t^2 - 2t) + (2 - 2t) \} \\
 &= e^{-t} (t^2 - 4t + 2)
 \end{aligned}$$

$$t^2 - 4t + 2 = (t - 2)^2 - 2$$



|       | 0 |   | $2 - \sqrt{2}$ |   | 2 |   | $2 + \sqrt{2}$ |   |
|-------|---|---|----------------|---|---|---|----------------|---|
| $y'$  | - | 0 | +              | + | + | 0 | -              | - |
| $y''$ | + | + | +              | 0 | - | - | 0              | + |
|       | ↘ |   | ↗              |   | ↘ |   | ↗              |   |

$$\begin{aligned}
 y' &> 0 \\
 y'' &> 0
 \end{aligned}$$



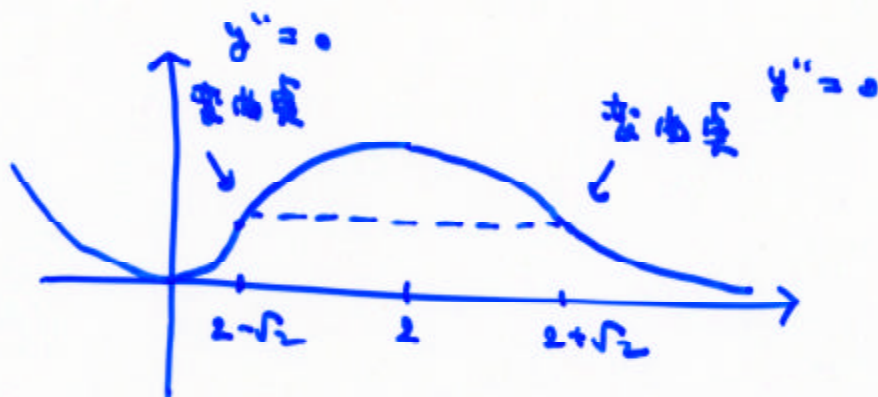
$$\begin{aligned}
 y' &< 0 \\
 y'' &> 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y' &> 0 \\
 y'' &< 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y' &< 0 \\
 y'' &< 0
 \end{aligned}$$



基本  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^k}{e^t} = 0$  (水内<sup>3</sup><sub>12</sub>に証明) 11

( $k=1, 2, 3, \dots$ )

$t \rightarrow +\infty \quad \frac{t^2}{e^t} \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} ?$  不定形

指数的増加の速さの<sup>1</sup>が $t$ の<sup>2</sup>増加より速く $t$ を $t$ する。

~~$\frac{n^k}{a^n}$~~   $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$

$a > 1$

$y''$  は何に使うか?

定理  $y'' > 0$  なら



$y'' < 0$  なら



$$(e^{-t^2})' = e^{-t^2} \cdot (-2t)$$

$$\text{III } y = t e^{-t^2}$$

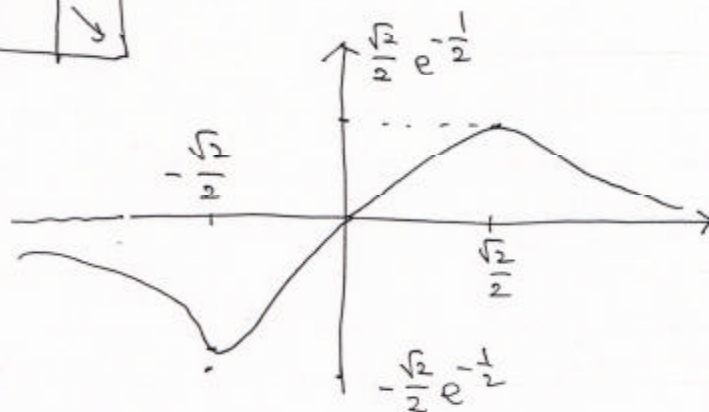
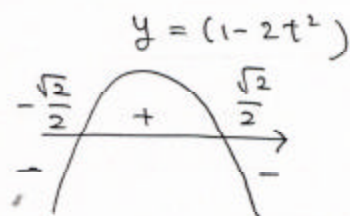
$$\begin{aligned} y' &= (t)' e^{-t^2} + t \cdot (e^{-t^2})' \\ &= e^{-t^2} + t e^{-t^2} (-2t) \\ &= (1 - 2t^2) e^{-t^2} > 0 \end{aligned}$$

次に増減表は下図である。

|      |   |                       |   |                      |   |
|------|---|-----------------------|---|----------------------|---|
| $t$  |   | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |   |
| $y'$ | - | 0                     | + | 0                    | - |
| $y$  | ↘ |                       | ↗ |                      | ↘ |

$$t e^{-t^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow t \geq 0$$



$$\text{§3 } s = t^2 \text{ とおくと}$$

$$t > 0 \text{ のとき } t \rightarrow +\infty \text{ のとき } s \rightarrow +\infty \text{ である。}$$

$$t e^{-t^2} = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{e^s} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow +\infty)$$

$$t < 0 \text{ のとき } t \rightarrow -\infty \text{ のとき } s \rightarrow +\infty \text{ である。}$$

$$t = -\sqrt{s} \quad \leftarrow s = t^2$$

$$t e^{-t^2} = \frac{-s^{\frac{1}{2}}}{e^s} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow +\infty)$$

である。したがって上図である。

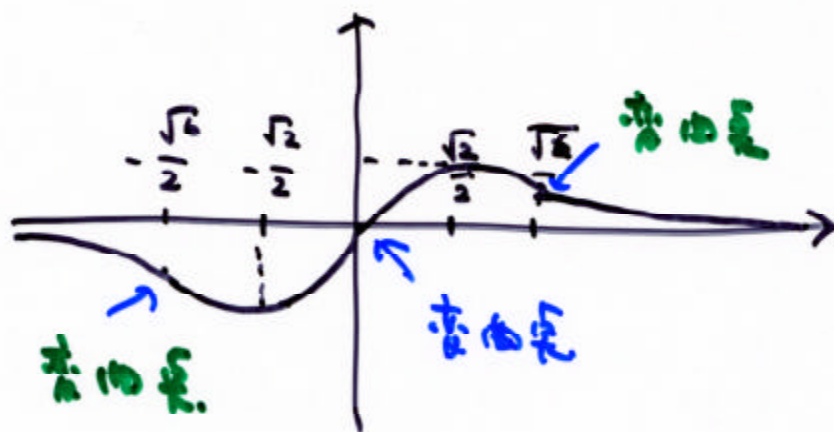
$$\begin{aligned}
 y'' &= (1-2t^2)' e^{-t^2} + (1-2t^2)(e^{-t^2})' \\
 &= (-4t) e^{-t^2} + (1-2t^2)(-2t) e^{-t^2} \\
 &= e^{-t^2} \times 2t \{(-2) + (2t^2 - 1)\} \\
 &= 2e^{-t^2} \times t (2t^2 - 3)
 \end{aligned}$$

$$t^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$



2nd order

|  |                       |   |                       |   |   |   |                      |   |                      |   |
|--|-----------------------|---|-----------------------|---|---|---|----------------------|---|----------------------|---|
|  | $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ |   | $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ |   | 0 |   | $\frac{\sqrt{6}}{2}$ |   | $\frac{\sqrt{6}}{2}$ |   |
|  | -                     | - | 0                     | + | + | 0 | -                    | - | -                    | - |
|  | -                     | 0 | +                     | + | + | 0 | -                    | - | 0                    | + |
|  | ↘                     |   | ↘                     |   | ↗ |   | ↗                    |   | ↘                    | ↘ |



# 微分方程式の【不定積分】

$$\underline{\text{公式}} \quad (e^{ct})' = c e^{ct}$$

$c$ : 定数

$$y(t) = e^{ct} \text{ ならば } y'(t) = c y(t)$$

逆  $\Rightarrow y'(t) = c y(t)$  を満たす関数  $y(t)$  を求めよ。

$$\begin{aligned} (y(t) e^{-ct})' &= y'(t) e^{-ct} + y(t) (e^{-ct})' \\ &= c y(t) e^{-ct} + y(t) (-c) e^{-ct} \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

定理  $f'(t) \equiv 0 \quad (t \in (a, b))$

$$\leadsto f(t) \equiv C$$



$y(t) e^{-ct} \equiv A \text{ (定数)}$   
 $\times e^{ct}$

$$\leadsto y(t) = A e^{ct}$$

1. 721

I

$$y = t^2 \log t \text{ のグラフを描く.}$$
$$(t > 0)$$

Hint:

$$t^2 \log t \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +0)$$

---

II

$$y = t e^{2t} \text{ のグラフ.}$$

Hint:

$$t \rightarrow -\infty \quad y = t e^{2t} \rightarrow 0$$

I

