5月16日 小テスト解答

I (1) $\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

(2) $\left(\dfrac{x}{x^2+x+1}\right)' = \dfrac{(x)'(x^2+x+1) - x(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$

$= \dfrac{(x^2+x+1) - x\cdot(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$= \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

(3) $(x^2\sqrt{x})' = (x^2)'\sqrt{x} + x^2(\sqrt{x})'$

$= 2x\sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$

$= 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}.$

N.B. $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)' = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}$ となっている.

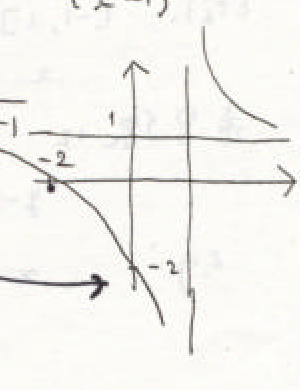
(4) $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)' = \dfrac{(x+2)'(x-1) - (x-1)'(x+2)}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{(x-1) - (x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0$

参考

$y = \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{(x-1)+3}{x-1} = 1 + \dfrac{3}{x-1}$

より グラフは右.



$x = 0 \quad y = \dfrac{0+2}{0-1} = -2$

$y = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0$

$(x>0)$

Ⅱ $y=\sqrt{x}\,(x-1)$ $=(\sqrt{x})'(x-1)+\sqrt{x}\,(x-1)'$

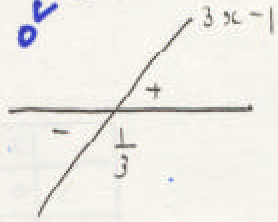
$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}(x-1)+\sqrt{x}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left\{(x-1)+\overbrace{\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}^{=2x}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x-1)$$

$0<$

x	(0)		$\frac{1}{3}$	
y'		$-$	0	$+$
y	(0)	$\searrow$		$\nearrow$

すて消える.



Ⅲ
$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{a^2+1}}{x-a}=\frac{\sqrt{z}-\sqrt{A}}{z-A}\cdot\frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}$$

において $z=x^2+1$, $A=a^2+1$ である。$x\to a$ のとき

$z\to A$ であり

$\sqrt{z}$ の $z=A$ における微分

$$\frac{\sqrt{z}-\sqrt{A}}{z-A}\longrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{A}}$$

$$\frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}\longrightarrow 2a$$ $=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=x+a$

(x^2+1) の $x=a$ における微分

より

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{a^2+1}}{x-a}\longrightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{A}}\cdot 2a=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

$$\boxed{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,x}$$

公式

$$(cf)' = cf' \quad c:\text{定数}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$$

I

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \longrightarrow f'(a)$$

合成関数の微分

$\{(1+t)^n\}'$

$z=1+t$とおく.
$A=1+a$

$$\frac{(1+t)^n-(1+a)^n}{t-a}=\frac{z^n-A^n}{z-A}\cdot\frac{(1+t)-(1+a)}{t-a}$$

$$=\frac{z^n-A^n}{z-A}\cdot 1$$

$t\to a$ のとき
$z\to 1+a=A$ $\longrightarrow$ (z^n の $z=A$ における微分係数)$\cdot 1$

$(z^n)'=nz^{n-1}$ $\qquad = nA^{n-1}\cdot 1.$

$\qquad = n(1+a)^{n-1}$

$\{(1+t)^n\}'=n(1+t)^{n-1}$ 合成 $u(t)=1+t$
$f(x)=x^n$

$$\frac{f(u(t))-f(u(a))}{t-a}=\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\cdot\frac{u(t)-u(a)}{t-a}$$

$x=u(t)$, $A=u(a)$ $\longrightarrow f'(A)\cdot u'(a)$

$\boxed{t\to a \text{ のとき } x\to A}$

公式 $\dfrac{d f(u(t))}{dt}=\dfrac{df}{dx}(u(t))\cdot u'(t)$

$$\frac{d(1+2t)^n}{dt} = n x^{n-1} \cdot 2 = 2n(1+2t)^{n-1}$$

$x \overset{= u(t)}{=} 1+2t$

$y = (1+2t)^n$ $\quad$ dy by dx

$= x^n$ $\quad$ with respect to x

$y = \sqrt{1-t^2}$

$x = 1-t^2$

$y = \sqrt{x}.$

$y^2 = 1-t^2$

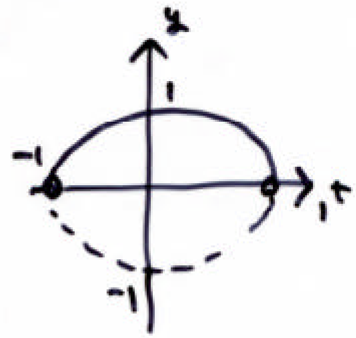
$y^2+t^2 = 1$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(-2t)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)$$

$$= -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$$



$$y = \frac{1}{\sqrt{1+t+t^2}} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$= \frac{1}{\sqrt{x}}$ (§@c $x = 1+t+t^2$)

$$= -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cdot(1+2t)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2t}{(1+t+t^2)\sqrt{1+t+t^2}}$$

$$(a+t)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, t^k \cdot a^{n-k}$$ 2項定理

a：定数.

$$\{(a+t)^n\}' = n(a+t)^{n-1} \cdot \underbrace{1}_{= \frac{d(a+t)}{dt}}$$

$$n(a+t)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \left({}_nC_k\, t^k a^{n-k}\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, k\, t^{k-1} a^{n-k}$$

両辺に t をかける.

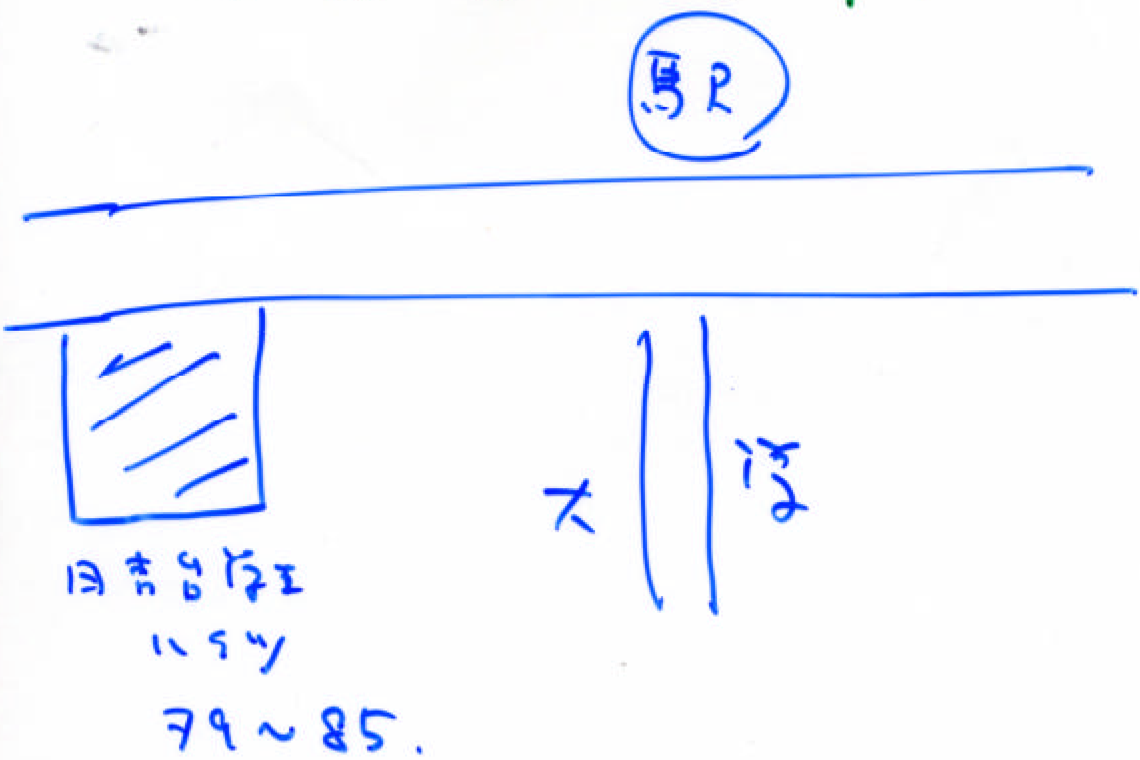
$$n(a+t)^{n-1} t = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \cdot k\, t^k a^{n-k}$$

$t = b$ を代入して

$$n(a+b)^{n-1} b = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, k\, b^k a^{n-k}$$

2項分布の期待値.

79～85年に日吉に住んでいたこと。
駒場2年、理学部4年の間



I

(1) $\left(t\sqrt{1+t^2}\right)' =$

(2) $\left(\dfrac{1}{(1+t^2)^2}\right)' =$

(3) $\left\{(1+t+t^2)^4\right\}' =$

(4) $\left\{\dfrac{1}{(2t+1)^4}\right\}' =$

II $y = \dfrac{t}{\sqrt{1+t+t^2}}$ の増減表を求める.

$$1+t+t^2 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$