5月9日 小テスト解答. $x \neq 1, 0$で考える.

Ⅰ $\boxed{\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x} \geqq 1} \Leftrightarrow \dfrac{2\{x-(x-1)\}}{(x-1)x} \geqq \dfrac{(x-1)x}{(x-1)x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)x-2}{(x-1)x} = \dfrac{x^2-x-2}{(x-1)x} \geqq 0$ $\leqq$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-1)x} \geqq 0}$ $\leqq$

$x \neq 1, 0$

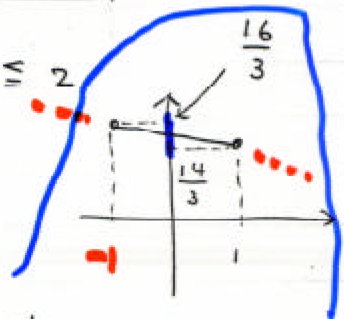
左辺の符号をxにより調べると

LHS 左辺

		-1		0		1		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	/	$-$	/	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	/	$-$	/	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	/	$+$	/	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	/	$+$	/	$+$	$+$	$+$
(左)	$+$	0	$-$	/	$+$	/	$-$	0	$+$

$x-2$ $-$ 2 $+$

(左辺) $\leqq 0 \Leftrightarrow -1 \leqq x < 0$, $1 < x \leqq 2$ が分かる.
または



Ⅱ 講義中示した.

Ⅲ $y = -\frac{1}{3}x + 5 \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ の値域は ← 定義域

$$\frac{14}{3} \leqq y \leqq \frac{16}{3}$$

となる. $[-1, 1] \longrightarrow \left[\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right]$ の対応は全単射で

$$x \longmapsto -\frac{1}{3}x + 5 = y$$

右を1つ決めると 左が1つ定まる

逆写像は

$$y - 5 = -\frac{1}{3}x$$

より $x = -3(y-5)$ $\left(y \in \left[\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right]\right)$

$= -3y + 15$

復習

$$(a-\delta,\, a) \cup (a,\, a+\delta) \xrightarrow{f,\,g} \mathbb{R}$$

N.B. $t=a$ では f と g が定義されていない

公式

$f(t) \longrightarrow A,\quad g(t) \longrightarrow B \quad (t \to a)$

1) $f(t) \pm g(t) \longrightarrow A \pm B$

2) $f(t) \cdot g(t) \longrightarrow A \cdot B$

3) $f(t) \neq 0,\ A \neq 0$ とすると

$$\frac{1}{f(t)} \longrightarrow \frac{1}{A}$$

$F(t)$

$$(a-\delta,\, a+\delta) \xrightarrow{F,\,G} \mathbb{R}, \quad t=a$$

公式 1) $\left(F(t) \pm G(t)\right)'\Big|_{t=a} = F'(a) \pm G'(a)$

2) $\left(F(t) \cdot G(t)\right)'\Big|_{t=a} = F'(a) \cdot G(a) + F(a)G'(a)$

3) $\left(\dfrac{1}{F(t)}\right)'\Big|_{t=a} = \dfrac{-F'(a)}{F(a)^2}$

A, B, C, D 定数.

例 ① $(Ax^3+Bx^2+Cx+D)'$

$$= (Ax^3)' + (Bx^2)' + (Cx)' + D'$$

$$= 3Ax^2 + 2Bx + C$$

公式 $(A f(x))' = A f'(x)$

$$\begin{aligned}(A f(x))' &= A' f(x) + A f'(x) \\ &= 0 \cdot f(x) + A f'(x) \\ &= A f'(x)\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$2n-(n-1)$
$=n+1$

累乗微分 $(x^{-n})' = -n x^{-n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ 既に示した.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}$$

$(x \cdot \sqrt{x})' =$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}}$
$= x^{\frac{3}{2}}$

$-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

$(x^{-\frac{1}{2}})' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$ ← $-\frac{3}{2}$

$$(x\sqrt{x})' = (x)'\sqrt{x} + x\cdot(\sqrt{x})'$$

$$= 1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (\sqrt{x})^2 = x.$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$

公式 $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$

$$y = (2x-3)(x-2)$$

$$y' = (2x-3)'(x-2) + (2x-3)(x-2)'$$

$$= 2(x-2) + (2x-3)\times 1.$$

$$= 4x - 7$$

公式 $\left(\frac{G}{F}\right)' = \frac{G'F - GF'}{F^2}$

$$(左) = G'\cdot\frac{1}{F} + G\cdot\left(\frac{1}{F}\right)'$$

$$= G'\frac{1}{F} + G\times\left(-\frac{F'}{F^2}\right)$$

$$= \frac{G'F - GF'}{F^2}$$

$$\left(\frac{2x}{x+3}\right)' = \frac{(2x)'(x+3) - 2x\cdot(x+3)'}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{2(x+3) - 2x}{(x+3)^2}$$

$$= [redacted] \frac{6}{(x+3)^2}$$

合成関数の微分.

$y=(x^2+1)^3$ の微分

$x \to a$ のとき

$z \to A$

$$\frac{(x^2+1)^3-(a^2+1)^3}{x-a} = \boxed{\frac{z^3-A^3}{z-A}} \cdot \boxed{\frac{\overbrace{(x^2+1)}^{z} - \overbrace{(a^2+1)}^{A}}{x-a}}$$

$$\frac{z^3-A^3}{z-A} \to 3A^2 \qquad \frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a} \to 2a$$

$z = x^2+1$

$A = a^2+1$

$x \to a$ のとき

$z \to A$

z^3 の $z=A$ における微分.

$$\to 3A^2 \cdot 2a$$

$$= 3(a^2+1)^2 \cdot 2a$$

(x^2+1 の $x=a$ における微分.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \longrightarrow f'(a)$$
$$(x \to a)$$

小テスト

I 次の関数の微分をもとめよ.

(1) $\dfrac{1}{x^2+1}$　　(2) $\dfrac{x}{x^2+x+1}$

(3) $x^2\sqrt{x}$　　(4) $\dfrac{x+2}{x-1}$

II $y=\sqrt{x}(x-1)$ $(x>0)$ の
増減表をもとめる.

III $y=\sqrt{x^2+1}$ の $x=a$ における微分
をもとめる

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{a^2+1}}{x-a}=\frac{\sqrt{z}-\sqrt{A}}{z-A}\cdot\frac{(x^2+1)-(a^2+1)}{x-a}$$

$z=x^2+1$, $A=a^2+1$