(1)

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + 2$$

→ 公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列が出てくる.

$$a_n = a_0 r^n$$

$|r| < 1 \rightsquigarrow \{a_n\}$ は収束

$$\lambda = \frac{1}{3}\lambda + 2 \qquad \frac{2}{3}\lambda = 2$$

$$\lambda = 3.$$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + 2. \\ -) & 3 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 \\ \hline & a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3) \end{array}$$

$\{a_n - 3\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列.

$$a_n - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - 3)$$

より $\quad a_n = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - 3)$

$$\longrightarrow 3 + 0 \times (a_0 - 3) = 3$$
$$(n \to +\infty)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + 2$$

$\{a_n\}$ が収束しているとする.

収束することを示さないと
以下は意味なし

$a_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ と仮定.

$a_{n+1} \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ が成立

$$a_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{3} a_n + 2}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \longmapsto \frac{1}{3} \times \alpha + 2$$

$$\alpha$$

$$\alpha = \frac{\alpha}{3} + 2 \rightsquigarrow \alpha = 3.$$

---

(2) $S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \frac{3}{2}.$

$|r| < 1$ のとき

$$S = 1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

① $r+1$

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

② $|r| < 1 \Rightarrow r^n \to 0$

(3) 復習

$$a_n \to \alpha \in \mathbb{R},\ b_n \to \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_n \pm b_n \longrightarrow \alpha \pm \beta \\ a_n \cdot b_n \longrightarrow \alpha\beta \\ a_n \neq 0,\ \alpha \neq 0 \Longrightarrow \\ \qquad \dfrac{1}{a_n} \longrightarrow \dfrac{1}{\alpha} \end{array} \right.$$

$$\frac{n^2+2}{-3n^2+n} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{-3+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1+0}{-3+0} = -\frac{1}{3}$$

$$\odot\ \frac{1}{n^k} \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

---

(4) $\Rightarrow$ $1\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots = ?$

$r = \frac{2}{3}$ $\qquad (n-1)r^{n-1}$ 部略写の.

$$T_n = r + 2\cdot r^2 + 3\cdot r^3 + \cdots + n r^n$$

$$-)\ rT_n = \qquad r^2 + 2\cdot r^3 + \cdots + (n-1)r^n + nr^{n+1}$$

$$(1-r)T_n = \boxed{r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n} - nr^{n+1}$$

$$= \boxed{\frac{r - r^{n+1}}{1-r}} - nr^{n+1}$$

$$T_n = \frac{r - r^{n+1}}{(1-r)^2} - \frac{nr^{n+1}}{1-r} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{2/3}{(1/3)^2} = 6.$$

練習 $|r| < 1$ $a \geq 2$

$n r^n \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$

実は $n^k r^n \longrightarrow 0 \quad (n \to +\infty)$

$(k = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\frac{4}{x-3} < 2x+1$$

$$2x+1-\frac{4}{x-3} > 0$$

$$\frac{(2x+1)(x-3)-4}{x-3} > 0$$

$$= \frac{2x^2-5x-7}{x-3}$$

$$= \frac{2(x-\frac{7}{2})(x+1)}{x-3}.$$

2 −7
1 1

7 4

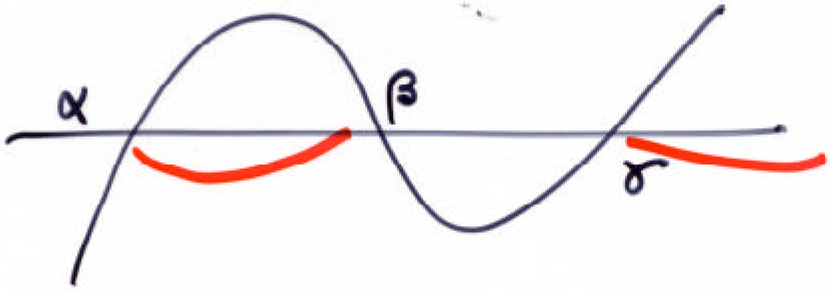
x		-1	◎	3		$7/2$	◎
$x-\frac{7}{2}$	$-$	$-$	$-$	/	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	/	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	/	$+$	$+$	$+$
	$-$	0	$+$	/	$-$	0	$+$

$-1 < x < 3$ または $x > \frac{7}{2}$

$\alpha < \beta < \gamma$

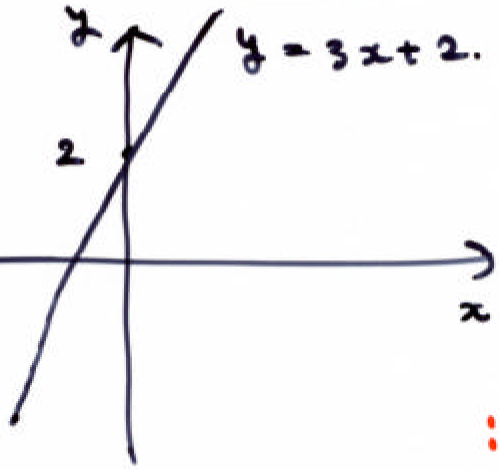
$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0$

$\Longleftrightarrow \alpha < x < \beta$ または $x > \gamma$



逆関数

$y = 3x + 2$



① 定義域 (domain)

$\mathbb{R}$ 実数全体

値域

y が値域 $\Leftrightarrow$ $y = 3x + 2$ である x がある。

結論 $\quad x = \dfrac{y-2}{3}$

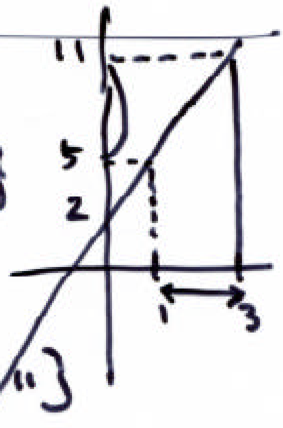
すべての y が値域

② 定義域 $[1, 3]$

$= \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$

↓

値域



$[5, 11] = \{y ; 5 \leq y \leq 11\}$

逆関数

① $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = 3x+2$

$\dfrac{y-2}{3} \longleftarrow y$

全単射

逆関数 $x = \dfrac{y-2}{3}$

$(y \in \mathbb{R})$

② $[2,3] \longrightarrow [5,11]$

$x \longmapsto y = 3+2$

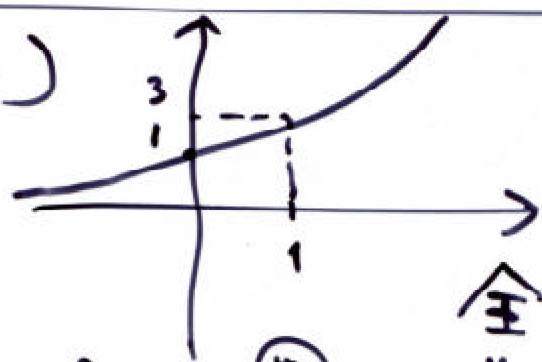
$\dfrac{y-2}{3} \longleftarrow y$

逆関数 $x = \dfrac{y-2}{3} \ (y \in [5,11])$

逆関数の定義域は$[5,11]$

---

③ $y = 3^x \quad (x \in \mathbb{R})$



定義域 $\mathbb{R}$

値域 $(0,+\infty)$

$= \{y ; y > 0\}$

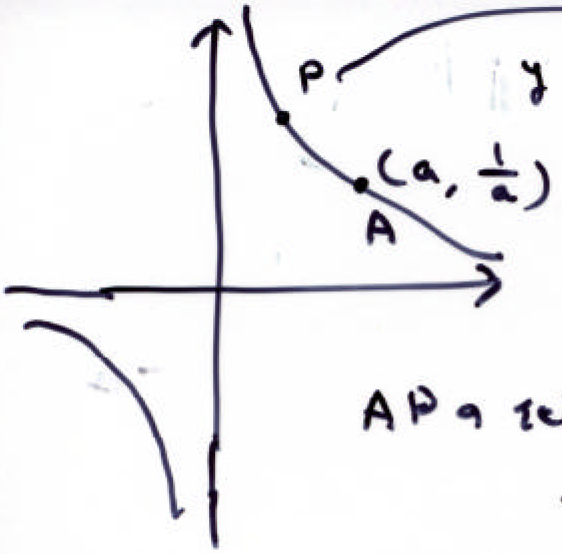
$\mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ 全単射

$x \longmapsto 3^x = y$

$\log_3 y \longleftarrow y$

全単射

逆関数 $x = \log_3 y \ (y > 0)$



$(a+h, \frac{1}{a+h})$

$h \neq 0$

APの傾き

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{(a+h) - a} = \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}$$

$$= \frac{-h}{h(a+h)a} = -\frac{1}{a} \times \frac{1}{a+h}$$

$$\downarrow$$

$$?$$

$h \to 0$

$h_n \to 0$ となる数列をとる

$$-\frac{1}{a} \times \frac{1}{a+h_n} \longrightarrow -\frac{1}{a} \times \frac{1}{a}$$

$$= -\frac{1}{a^2}$$

APの傾き $\longrightarrow -\frac{1}{a^2}$

$(h \to 0)$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

I 不等式

$$\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x} \geqq 1.$$

を解く.

II $$\frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h} \longrightarrow ?$$

$(h \to 0)$

III $y = -\frac{1}{3}x + 5 \quad (x \in [-1, 1])$

の逆関数を求める.