

(3) $\Rightarrow$ (1) は、 t_1, t_2 に関する証明.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = T \vec{w}.$$

$$\begin{aligned} f_A(\vec{x}) &= (A\vec{x}, \vec{x}) = (AT\vec{w}, T\vec{w}) \\ &= ({}^tTAT\vec{w}, \vec{w}) \end{aligned}$$

$${}^tTAT = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & A_2 \vec{t} + \vec{a} \\ \hline & \delta \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \\ \delta &= {}^t\vec{t} (A_2 \vec{t} + \vec{a}) + {}^t\vec{a} \vec{t} + a_{33}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 2.

$$\vec{t} = -A_2^{-1} \vec{a} \in \mathbb{R}^2$$

$$\delta = -{}^t\vec{a} A_2^{-1} \vec{a} + a_{33} \quad (= \delta'_{11})$$

$${}^tTAT = \left(\begin{array}{c|c} A_2 & 0 \\ \hline 0 & a_{33} \end{array} \right)$$

$\in \mathbb{R}^3$

(5)

$\delta > 0$ or $\det(A_2) > 0, \det(A) > 0$
or $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \underbrace{(\tau^T A \tau \vec{w}, \vec{w})}_{J_A(\vec{x})} &= \left(A_2 \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) \\ &+ \delta y_3^2 \end{aligned}$$

or $J_A(\vec{x}) > 0$ (if $\vec{x} \neq \vec{0}$) or $\mathbb{R}^3$.

A 正定行列式行列と可。 A 一定 2×2 形式 (6)

$$f_A(\vec{x}) = (A\vec{x}, \vec{x})$$

12×12 形式 成立可。

定理 (i) $f_A(\vec{x})$ 非負定値 (resp. 非正定値)

$$(f_A(\vec{x}) \geq 0 \text{ (resp. } f_A(\vec{x}) \leq 0))$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 固有値 } \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \\ (\text{resp. } \alpha, \beta, \gamma \leq 0)$$

$$\Leftrightarrow A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$$

$$a_{11}, a_{22}, a_{33} \geq 0$$

$$\det(A_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\det(A_{13}) \geq 0, \det(A_{23}) \geq 0.$$

$$\det(A) \geq 0.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{resp.} \\ a_{11}, a_{22}, a_{33} \leq 0 \\ \det(A_{12}), \det(A_{13}), \det(A_{23}) \leq 0 \\ \det(A) \leq 0 \end{array} \right)$$

(2)

2.7.2

$$w = f(x, y, z)$$

の極値問題は応用が3. (a, b, c) の停留点と
3. c.e

$$f_x = f_y = f_z = 0 \quad \text{at } (a, b, c)$$

2.7.3.

$$F(t) = f(a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t)$$

と定めて

$$F'(t) = \alpha f_x(a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t) \\ + \beta f_y(\text{---}) + \gamma f_z(\text{---})$$

2.7.4) $F'(0) = 0$ 2.7.3. 1.3.12

$$F''(t) = \left(H \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right)$$

2.7.3. 2.2. H は $(a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t)$ に
2.1.3. f の Hessian

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

2.7.4.

こゝで $F(t)$ に対して、 $\forall \epsilon > 0$, 定理 2 適用する。

定理 1 $F(t)$ が $t = t_0$ で極小 (resp. 極大)

$$\Rightarrow F'(t_0) = 0, F''(t_0) \geq 0 \quad (\text{resp. } \leq 0)$$

定理 2

$$F'(t_0) = 0, F''(t_0) > 0 \quad (\text{resp. } < 0)$$

$$\Rightarrow F \text{ は } t = t_0 \text{ で極小 (resp. 極大)}$$

この定理を用いると (a, b, c) が $f(x, y, z)$ の停留点であることは必ずしも成立する。

定理 3, (a, b, c) が極小 (resp. 極大)

$$\Rightarrow (a, b, c) \text{ は } f \text{ の}$$

$(H \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$ は非負定値
(resp. 非正定値)

丁の停留点
(a, b, c) 12 2112

(9)

定理 4

$(H \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix})$ が正定値
(resp. 負定値)

$\Rightarrow$ f は (a, b, c) 2" 極小.
(resp. 極大)