

経済数学 I B. 1月19日.

$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xz - 3y^2$   
の極値問題について考える.

まず停留点を求める.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3z = 3(x^2 - z) = 0 \quad \text{--- ①} \\ f_y = 3y^2 - 6y = 3y(y - 2) = 0 \quad \text{--- ②} \\ f_z = 3z^2 - 3x = 3(z^2 - x) = 0 \quad \text{--- ③} \end{cases}$$

と解く. ①より  $z = x^2$  である, ③より  
得られる.  $x = z^2$  である.

$$x^4 = x$$

これを解く. ②より  $y = 0$  または  $y = 2$

$$x = 0, 1.$$

②より  $x = 0$  かつ  $z = 0$ ,  $x = 1$  かつ  $z = 1$  と  
得られる. ②は

$$y = 0 \text{ または } 2$$

と解く. ②より  $x = 0$  かつ  $z = 0$ ,  $x = 1$  かつ  $z = 1$  と  
得られる. ②は

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, 0, 1),$$

$$(0, 2, 0), (1, 2, 1)$$

4点の極値問題. ②より 4点の極値問題. ②より 4点の極値問題.  
判定 (F). ②より 4点の極値問題. ②より 4点の極値問題.  
計算する.

$$f_{xx} = 6x, f_{xy} = 0, f_{xz} = -3$$

$$f_{yx} = 0, f_{yy} = 6(y-1), f_{yz} = 0$$

$$f_{zx} = -3, f_{zy} = 0, f_{zz} = 6z$$

と  $\therefore$  Hesse 176412

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 6(y-1) & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

と  $\therefore$  3.

(1) at  $(0, 0, 0)$

$$\det \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6z \end{pmatrix} = -9 < 0$$

と  $\therefore$  1)  $\Rightarrow z=0$  は極大・極小と  $\therefore$  3  $\therefore$  11. 実際、  
 $(0, 0, 0)$  は極大  $\therefore$  12 は極小. なる  $\therefore$  17  
 $f(x, 0, z)$

と  $(0, 0, 0)$  は極大・極小.  $\therefore$  18)

$$\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6z \end{pmatrix}$$

非  
 $\therefore$  1) 定値  $\therefore$  12  $\therefore$  正定値  $\therefore$  11,  $\det \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6z \end{pmatrix} \geq 0$   
 $\therefore$  18  $\therefore$  11)

が  $\times$  18  $\therefore$  12.

(2) at  $(0, 2, 0)$  (1) と同様  $\therefore$  12  $\therefore$  11  $\therefore$  17  
 $\therefore$  18  $\therefore$  11.

(3) at (1, 0, 1)

(1, 0, 1) に  $\nabla f = 0$ 

$$\det \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6(y-1) \end{pmatrix} < 0$$

となり, (1) と (2) の  $\nabla f$  が 0 になる点に 極大・極小となり 得る。  $f(x, y, 1)$  は  $f_1 \geq 3$  である。

(4) at (1, 2, 1)

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

に  $\nabla f = 0$ 

$$H_1 = 6 > 0, \quad H_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 36 > 0$$

$$\det(H) = 6^3 - (-3) \times 6 \times (-3)$$

$$= 3^2 \cdot 6 (6 - 1) = 3^2 \cdot 6 \cdot 5 > 0$$

F1) (1, 2, 1) に  $\nabla f = 0$  かつ  $H$  は正定値である。  $f_1 = 2$  である。