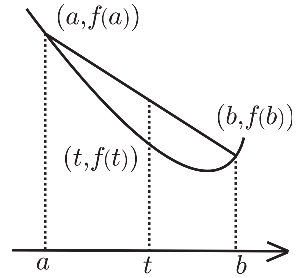
0.1　関数の凸性



I を $\mathbb{R}$ の区間とします。I 上で定義された関数

$$f:\ I \longrightarrow \mathbb{R}$$

について考えます。f が**凸関数**であるとは I に含まれる任意の閉区間 $[a,b]$ に対して

$$f(t) \leqq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) \quad (a \leqq t \leqq b) \tag{1}$$

が成立するときです。また f が**狭義の凸関数**であるとは、(1) の代わりに

$$f(t) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) \quad (a < t < b) \tag{2}$$

が成立するときです。f が狭義の凸関数であるならば、f は凸関数となります。

区間 I が開区間で、関数 f が C^2 級であるとします。このとき次の定理により、f の凸性と f'' の符号とは密接に関係しています。

定理 0.1. **(i)** $f''(t) \geqq 0$ が全ての $t \in I$ に対して成立するとします。このとき f は凸関数となります。
(ii) $f''(t) > 0$ が全ての $t \in I$ に対して成立するとします。このとき f は狭義の凸関数となります。

(ii) だけを証明します。I に含まれる任意の閉区間 $[a,b]$ をとります。このとき平均値の定理から、$a < c < b$ を満たす c に対して

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が成立することが導かれます。このとき

$$F(t) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) - f(t)$$

と定めると

$$F(t) = f(a) + f'(c)(t-a) - f(t)$$

が成立します。f が C^2 級ですから導関数、第 2 次導関数が存在して

$$F'(t) = f'(c) - f'(t), \quad F''(t) = -f''(t) < 0$$

となります。$F''(t) < 0$ より $F'(t)$ は単調増加であることが分ります。また $F'(c) = 0$ から

$$t < c \quad \Longrightarrow F'(t) > F'(c) = 0$$

$$t > c \quad \Longrightarrow F'(t) < F'(c) = 0$$

となります。これから増減表を書くと

t	a		c		b
F'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
F	0	$\nearrow$	$F(c)$	$\searrow$	0

となります。この増減表から

$$a < t < b \Longrightarrow F(t) > 0$$

が従い

$$f(t) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) \quad (a < t < b) \tag{3}$$

を得ます。

0.2 Lagrange の未定乗数法（十分条件）

制約条件

$$g(x, y) = 0$$

の下で、極値問題

$$z = f(x, y)$$

を考えます。曲線 $g(x, y) = 0$ 以上の滑らかな点 (a, b) がこの問題の停留点であるとします。すなわち

$$g_x(a, b)^2 + g_y(a, b)^2 \neq 0, \quad g(a, b) = 0$$

が成立して、

$$\begin{cases} f_x(a, b) = \lambda g_x(a, b) \\ f_y(a, b) = \lambda g_y(a, b) \end{cases} \tag{4}$$

が成立すると仮定します。この状況で (a, b) が極小であるか、極大であるかを判定する十分条件を与えます。そのために $g_y(a, b) \neq 0$ の場合を考えます ($g_y(a, b) \neq 0$ の場合も同様です)。陰関数定理を用いると、(a, b) の近くで曲線は

$$y = \varphi(x)$$

と表示されます。これを用いて

$$F(t) := f(t, \varphi(t))$$

と定めると

$$F'(t) = f_x(t, \varphi(t)) + f_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \tag{5}$$

と計算されます。また

$$g(t, \varphi(t)) \equiv 0$$

から

$$g_x(t, \varphi(t)) + g_y(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \equiv 0 \tag{6}$$

が成立して、特に

$$\varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

が成立します。このことから

$$\begin{aligned} F'(a) &= f_x(a,b) + f_y(a,b) \cdot \varphi'(a) = f_x(a,b) - f_y(a,b)\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)} \\ &= f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) \quad (\lambda = \frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}\text{を用いる}) \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad (f_x(a,b) = \lambda g_x(a,b)\ \text{を用いる}) \end{aligned}$$

を示すことができます。

次に $F''(a)$ の符号を調べます。(5) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} F''(t) &= f_{xx}(t,\varphi(t)) + f_{xy}(t,\varphi(t))\varphi'(t) \\ &\quad +\varphi'(t)\left(f_{yx}(t,\varphi(t)) + f_{yy}(t,\varphi(t))\varphi'(t)\right) + f_y(t,\varphi(t))\varphi''(t) \\ &= f_{xx}(t,\varphi(t)) + 2f_{xy}(t,\varphi(t))\varphi'(t) \\ &\quad +f_{yy}(t,\varphi(t))\left(\varphi'(t)\right)^2 + f_y(t,\varphi(t))\varphi''(t) \end{aligned}$$

と計算されます。この式の $\varphi''(t)$ を求めるために(6) の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} & g_{xx}(t,\varphi(t)) + g_{xy}(t,\varphi(t))\varphi'(t) \\ &\quad +\varphi'(t)\left(g_{yx}(t,\varphi(t)) + g_{yy}(t,\varphi(t))\varphi'(t)\right) + g_y(t,\varphi(t))\varphi''(t) \\ = {} & g_{xx}(t,\varphi(t)) + 2g_{xy}(t,\varphi(t))\varphi'(t) \\ &\quad +g_{yy}(t,\varphi(t))\left(\varphi'(t)\right)^2 + g_y(t,\varphi(t))\varphi''(t) \\ \equiv {} & 0 \end{aligned}$$

を得ます。この式から

$$\varphi''(a) = -\frac{1}{g_y(a,b)}\left(g_{xx}(a,b) + 2g_{xy}(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2\right)$$

が従い、さらに $F''(a)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} F''(a) &= f_{xx}(a,b) + 2f_{xy}(a,b)\varphi'(a) + f_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2 \\ &\quad -\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}\left(\left(g_{xx}(a,b) + 2g_{xy}(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2\right)\right) \\ &= f_{xx}(a,b) + 2f_{xy}(a,b)\varphi'(a) + f_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2 \\ &\quad -\lambda\left(g_{xx}(a,b) + 2g_{xy}(a,b)\varphi'(a) + g_{yy}(a,b)(\varphi'(a))^2\right) \end{aligned}$$

が導かれる。ここで $\lambda = -\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}$ を用いていることに注意しよう。さらに $L(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ と定めると

$$\begin{aligned} & F''(a) \\ = \;& L_{xx}(a,b) + 2L_{xy}(a,b)\cdot\varphi'(a) + L_{yy}(a,b)\cdot(\varphi'(a))^2 \\ = \;& L_{xx}(a,b) + 2L_{xy}(a,b)\cdot\left(-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a.b)}\right) + L_{yy}(a,b)\cdot\left(-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a.b)}\right)^2 \\ = \;& -\frac{L_{xx}(a,b)g_y(a,b)^2 - 2L_{xy}(a,b)g_x(a,b)g_y(a,b) + L_{yy}(a,b)g_x(a,b)^2}{(g_y(a.b))^2} \\ = \;& -\frac{1}{(g_y(a.b))^2}\begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & L_{xx}(a,b) & L_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & L_{yx}(a,b) & L_{yy}(a,b) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

が導かれる。このことから

$$B(a,b) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(a,b) & g_y(a,b) \\ g_x(a,b) & L_{xx}(a,b) & L_{xy}(a,b) \\ g_y(a,b) & L_{yx}(a,b) & L_{yy}(a,b) \end{vmatrix} \tag{7}$$

と定めると

$$F''(a) \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow B(a,b) \lessgtr 0$$

を得る。一般に、C^2 級の 1 変数関数 $F(t)$ が

$$F(a) = 0, \quad F''(a) > 0 \quad (\text{resp. } F''(a) < 0)$$

を満たすとき F は $t = a$ で極小 (resp. 極大) であることが分る。以上から次の定理が示された。

定理 0.2. 条件

$$g_x(a,b)^2 + g_y(a,b)^2 \neq 0, \quad g(a,b) = 0$$

を仮定します。また (a,b) において

$$\begin{cases} f_x(a,b) = \lambda g_x(a,b) \\ f_y(a,b) = \lambda g_y(a,b) \end{cases} \tag{8}$$

が成立していると仮定します。このとき(7) において定まる $B(a,b)$ が

$$B(a,b) < 0 \quad (\textit{resp.} \quad B(a,b) < 0)$$

を満たすならば、制約条件つき極値問題

$$z = f(x,y) \quad subject\ tog(x,y) = 0$$

は (a,b) で極小値 *(resp.* 極大値*)* をとります。

例 0.1. 制約条件

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

の下で

$$z = f(x,y) = x^3 + y^3$$

の極値問題を考えましょう。

まず g と f の偏導関数を求めると

$$g_x = 2x, \quad g_y = 2y$$

$$f_x = 3x^2, \quad f_y = 3y^2$$

と計算されます。(x,y) で極値をとるとすると、*Lagrange* の条件から

$$3x^2 = \lambda \cdot 2x \tag{9}$$

$$3y^2 = \lambda \cdot 2y \tag{10}$$

となります。これらの条件は

$$(9) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{または} \quad \lambda = \frac{3}{2}x$$

$$(10) \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{または} \quad \lambda = \frac{3}{2}y$$

より、(9) かつ(10) の必要十分条件は

$$(x = y = 0) \quad \text{または} \quad (x = 0,\ \lambda = \frac{3}{2}y)$$

$$\text{または}\ (y = 0,\ \lambda = \frac{3}{2}x) \quad \text{または} \quad (\lambda = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}y)$$

であることが分かります。このことから場合分けをします。
(i) $\underline{x = y = 0 \text{ のとき}}$　制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ を満たしません。
(ii) $\underline{x = 0,\ \lambda = \frac{3}{2}y \text{ のとき}}$　$x = 0$ を制約条件 $x^2+y^2 = 1$ に入れると $y = \pm 1$ となります。このとき *Lagrange* の条件を $\lambda = \pm\frac{3}{2}$ で満たします。
(iii) $\underline{y = 0,\ \lambda = \frac{3}{2}x \text{ のとき}}$　$y = 0$ を制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ に入れると $x = \pm 1$ となります。このとき *Lagrange* の条件を $\lambda = \pm\frac{3}{2}$ で満たします。
(iv) $\underline{\lambda = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}y \text{ のとき}}$ $x = y$ が必要で、制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ に代入して $y^2 = \frac{1}{2}$ を得ます。これから

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり、*Lagrange* の条件を $\lambda = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ で満たします。

次に十分条件を調べます。まず g と f の *2* 階の偏導関数を求めると

$$g_{xx} = 2, \quad g_{xy} = 0, \quad g_{yy} = 2$$

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6y$$

と計算されます。よって

$$L_{xx} = 2 - \lambda \cdot 6x = 2 - 6\lambda x, \quad L_{xy} = 0, \quad L_{yy} = 2 - \lambda \cdot 6y = 2 - 6\lambda y$$

となります。十分条件を **(iv)**

$$(x, y) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}), \quad \lambda = \pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

の場合に調べてみましょう。

$$g_x = g_y = \pm\sqrt{2}$$

$$L_{xx} = 2 - 6\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5}{2}, \quad L_{xy} = 0, \quad L_{yy} = -\frac{5}{2}$$

と計算されます。このことから

$$\begin{aligned} B(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}) &= \begin{vmatrix} 0 & \pm\sqrt{2} & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ \pm\sqrt{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\pm\sqrt{2}\right)\left(\pm\sqrt{2}\right)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = 10 > 0 \end{aligned}$$

より、$(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$ で極大値をとることが示された。

7 月 14 日（経済数学 I）小テスト解答

> 制約条件制約条件 $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で
> $$z = f(x,y) = xy$$
> の極値問題を考える。極値を取る点を求めよ。

f と g の偏導関数を求めると

$$f_x = y,\ f_y = x$$

$$g_x = 4x,\ g_y = 2y$$

となる。Lagrange の条件は

$$y = \lambda \cdot 4x \quad \text{すなわち} \quad y = 4\lambda x \tag{11}$$

$$x = \lambda \cdot 2y \quad \text{すなわち} \quad x = 2\lambda y \tag{12}$$

となる。(11) を(12) に代入すると

$$x = 8\lambda^2 x$$

が必要条件であることが分かる。これは

$$x = 0 \quad \text{または} \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

と同値である。これを用いて場合分けを行う。

(i) $\underline{x = 0\ \text{のとき}}$(11) から $y = 0$ が従う。ところが $x = y = 0$ は制約条件 $2x^2 + y^2 = 1$ を満たさない。

(ii) $\underline{\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{のとき}}$(11) と(12) は $y = \sqrt{2}x$ と同値である。これを制約条件に入れると

$$2x^2 + 2x^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

を得る。$y = \sqrt{2}x$ に代入すると

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。以上で、この場合は停留点が

$$(x,y) = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$$

であることが分かった。

(iii) $\underline{\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ \text{のとき}}$(11) と(12) は $y = -\sqrt{2}x$ と同値である。これを制約条件に入れると

$$2x^2 + 2x^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

を得る。$y=\sqrt{2}x$ に代入すると

$$y=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。以上で、この場合は停留点が

$$(x,y)=(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})$$

であることが分かった。

以上で得た停留点に対して、十分条件を適用してみよう。そのために f と g の 2 階の偏導関数を求めると

$$f_{xx}=f_{yy}=0,\quad f_{xy}=1$$

$$g_{xx}=4,\quad g_{yy}=2,\quad g_{xy}=0$$

となる。これから $L=f-\lambda g$ は

$$L_{xx}=-4\lambda,\quad L_{yy}=1,\quad L_{yy}=-2\lambda$$

となる。ここで上の **(ii)** と **(iii)** の場合分けを行う。

(ii) $\underline{(x,y)=(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})\text{、}\lambda=\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ のとき}}$

$$\begin{aligned}B(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) &= \begin{vmatrix} 0 & \pm 2 & \pm\sqrt{2} \\ \pm 2 & -\sqrt{2} & 1 \\ \pm\sqrt{2} & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \\ &= (\pm\sqrt{2})^2 \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 8\sqrt{2}>0\end{aligned}$$

より、この 2 点は極大点である。

(iii) $\underline{(x,y)=(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2})\text{、}\lambda=\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ のとき}}$

$$\begin{aligned}B(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}) &= \begin{vmatrix} 0 & \pm 2 & \mp\sqrt{2} \\ \pm 2 & \sqrt{2} & 1 \\ \mp\sqrt{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \\ &= (\pm\sqrt{2})^2 \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -8\sqrt{2}<0\end{aligned}$$

より、この 2 点は極小点である。