微分積分（戸瀬信之）—小テスト 解答（03 年 07 月 14 日）

次の積分の値を求めよ。

(1)

$$\int_0^1 (2x+3)^4 dx$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

(3)

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$$

(4)

$$\int_0^1 xe^{-x^2} dx$$

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+3)^4 dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+3)^4 (2x+3)' dx \\ &= \int_3^5 u^4 du \quad (u = 2x+3 \text{ とおく}) \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{u^5}{5}\right]_3^5 = \frac{1}{10}(5^5 - 3^5)\end{aligned}$$

上の計算で u と x の対応

x	0	$\to$	1
t	3	$\to$	5

を用いた。慣れると、$u = 2x+3$ より

$$du = 2dx \quad \text{従って} \quad dx = \frac{1}{2}du$$

から

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+3)^4 dx &= \int_3^5 u^4 \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2}\int_3^5 u^4 du\end{aligned}$$

と計算することも可能であろう。

(2) $(1+x^2)' = 2x$ から $x = \frac{1}{2}(1+x^2)'$ が分る。このことから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)'\frac{1}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u^2}du \quad (u = 1+x^2\text{とおいた}) \\ &= \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{u}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。上の計算で u と x の対応

x	0	$\rightarrow$	1
u	1	$\rightarrow$	2

を用いた。これも同様に、$u = 1+x^2$ のとき

$$du = 2xdx \quad \text{すなわち} \quad xdx = \frac{1}{2}du$$

から

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u^2}$$

と計算可能である。

(3) $(1+x^2)' = 2x$ から $x = \frac{1}{2}(1+x^2)'$ が分る。このことから

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)'\sqrt{1+x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du \quad (u = 1+x^2\text{とおいた}) \\ &= \frac{1}{2}\left|-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

となる。上の計算で u と x の対応

x	0	$\rightarrow$	1
u	1	$\rightarrow$	2

を用いた。これも同様に、$u = 1+x^2$ のとき

$$du = 2xdx \quad \text{すなわち} \quad xdx = \frac{1}{2}du$$

から

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du$$

と計算可能である。

(4) $(-x^2)' = -2x$ から $x = -\frac{1}{2}(-x^2)'$ が分る。このことから

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x^2}dx &= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}(-x^2)'dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u du \quad (u=-x^2\text{とおいた}) \\ &= -\frac{1}{2}\left|e^u\right]_0^{-1} = -\frac{1}{2}(e^{-1}-1) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})\end{aligned}$$

となる。上の計算で u と x の対応

x	0	$\to$	1
u	0	$\to$	-1

を用いた。これも同様に、$u = -x^2$ のとき

$$du = -2xdx \quad \text{すなわち} \quad xdx = -\frac{1}{2}du$$

から

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} e^u du$$

と計算可能である。

次の積分の値を求めよ。

(5)

$$\int_0^2 xe^{-x}dx$$

(6)

$$\int_1^e x\log x dx$$

(5)

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{-x}dx &= \int_0^2 x\left(-e^{-x}\right)'dx = \left|-xe^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}dx \\ &= -2e^{-2} + \left|-e^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2} + (-e^{-2}+1) \\ &= 1-\frac{3}{e^2}\end{aligned}$$

と計算される。ここで

$$\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$$

から

$$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$$

を用いている。

(6)

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\log x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x dx \\
&= \left|\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\left(\log x\right)' dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left|\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

と計算される。