2013年度　ミクロ経済学中級Ib第1回演習解答

グレーヴァ香子担当クラス

1. $\Re^2_{++}$が開集合であることの証明：任意のベクトル$\mathbf{a} \in \Re^2_{++}$をとる。$\Re^2_{++}$の定義より$a_j > 0$ for all $j = 1, 2$である。 $\min\{a_1, a_2\}$を考えるとこれも厳密に正なので、それより小さい$r > 0$が存在し、$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{y} \in \Re^2 \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{y}) < r\}$を作る。この中の任意の$\mathbf{y}$を考えると、半径$r < \min\{a_1, a_2\}$であるから、各座標$j = 1, 2$について$y_j > 0$である。したがって$B_r(\mathbf{a}) \subset \Re^2_{++}$が示せた。

   凸集合であることの証明：任意の2ベクトル$\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \Re^2_{++}$をとり、任意の実数$\alpha \in [0, 1]$についての凸結合に名前を付けて$\mathbf{x} := \alpha\mathbf{a} + (1-\alpha)\mathbf{a}'$としてみる。これはベクトルで、各座標$j = 1, 2$について$\mathbf{x}_j = \alpha\mathbf{a}_j + (1-\alpha)\mathbf{a}'_j$となっているものである。$\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \Re^2_{++}$より、各座標$j = 1, 2$について$\mathbf{a}_j > 0$, $\mathbf{a}'_j > 0$であるから、$\alpha\mathbf{a}_j + (1-\alpha)\mathbf{a}'_j > 0$が成立する。すなわち$\mathbf{x} \in \Re^2_{++}$。

2. 非負象限$\Re^2_+$が閉集合の証明：いろいろな方法があるが、$\Re^2_{++}$が開集合である証明を応用して、$(\Re^2_+)^c = \{\mathbf{y} \in \Re^2 \mid y_1 < 0 \quad \text{または } y_2 < 0\}$が開集合であることを示してみる。

   $(\Re^2_+)^c$から任意のベクトル$\mathbf{y}$をとってきて、うまく半径$r > 0$を作って開球$B_r(\mathbf{y}) \subset (\Re^2_+)^c$としたい。

   $\mathbf{y}$の位置は3通りの場合があるが（第2象限、第3象限、第4象限に対応）、$y_1 \geqq 0, y_2 < 0$のときは$0 < r < -y_2$となるようなr、$y_1 < 0, y_2 < 0$のときは$0 < r < \min\{-y_1, -y_2\}$となるような$r$、$y_1 < 0, y_2 \geqq 0$のときは$0 < r < -y_1$となるような$r$をとればよい。

   凸集合の証明：1の証明の$>$を$\geqq$にかえればよい。