Vickrey-Clarke-Groves Mechanism

公共財供給における Free Rider 問題の一つの解決策

ここでは Groves mechanism をやる

- n 人の人たちで、ある公共プロジェクトを行うかどうかを決める
- プロジェクトのコストを $C \geqq 0$ とする
- 帰結の集合 $A = \{(x, \{m_i\}_{i=1}^n) \mid x \in \{0,1\},\ m_i \in \Re \ \ \forall i\}$

  $x \in \{0,1\}$：プロジェクトをやるかやらないか

  $m_i \in \Re$ ：個人 i による支払い（受け取り）金額
- 各個人は $u_i = \theta_i x - m_i$ という形の準線形効用関数を持つ

  θ_i：プロジェクトから得られる個人 i の gross benefit

  このパラメターさえ決まれば効用関数が決まるので、social choice function はパラメターの組み合わせ $\Re^n$ を定義域としてよい

- 効率性：$x(\theta_1, \ldots, \theta_n) = 1 \iff \sum_{i=1}^{n} \theta_i \geqq C$
- 効率的かつ strategy-proof なメカニズムがある！

Groves (1973) "Incentives in Teams" *Econometrica*

Groves Mechanism

任意の $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Re^n$ について $f^G(a) = (x(a), m(a))$ を以下のような関数とする。

$$x(a) = 1 \iff \sum_{i=1}^{n} a_i \geqq C$$

$$m_i(a) = x(a)(C - \sum_{j \neq i} a_j) + h_i(a_{-i}) \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

for some $h_i : \Re^{n-1} \to \Re$

各人は gross benefit $a_i \in \Re$(必ずしも θ_i でなくてもよい）を表明し、合計がコストをカバーするときだけプロジェクトを行う。

支払いは、他者の表明金額に応じて決まる

定理：Groves mechanism $f^G : \Re^n \to A$ は strategy-proof である。

証明：任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ をとり、他の人たちの表明値 a_{-i} を任意に固定する。i が θ_i でない表明 a_i をしても効用が高くならないことを証明する。

ケース１：$x(\theta_i, a_{-i}) = x(a_i, a_{-i})$ のとき

結果が変わらず、支払いは他人の a_{-i} にしか依存しないので、

$m_i(\theta_i, a_{-i}) = m_i(a_i, a_{-i})$。

ゆえに、効用も変わらない $u_i(\theta_i, a_{-i}) = u_i(a_i, a_{-i})$。

ケース２：$x(\theta_i, a_{-i}) = 0$ だが $x(a_i, a_{-i}) = 1$ のとき

$x(\theta_i, a_{-i}) = 0$ だから $\sum_{j\neq i} a_j + \theta_i < C$ であることに注意。

真実 θ_i を表明すると $u_i(\theta_i, a_{-i}) = -h_i(a_{-i})$ のみの支払い

a_i を表明すると $u_i(a_i, a_{-i}) = \theta_i - (C - \sum_{j\neq i} a_j) - h_i(a_{-i})$

$= -(C - \sum_{j\neq i} a_j - \theta_i) - h_i(a_{-i}) < -h_i(a_{-i})$

ケース３：$x(\theta_i, a_{-i}) = 1$ だが $x(a_i, a_{-i}) = 0$ のとき

$x(\theta_i, a_{-i}) = 1$ だから $\sum_{j\neq i} a_j + \theta_i \geqq C$ であることに注意。
真実 θ_i を表明すると $u_i(\theta_i, a_{-i}) = \theta_i - (C - \sum_{j\neq i} a_j) - h_i(a_{-i})$
$= (\sum_{j\neq i} a_j + \theta_i - C) - h_i(a_{-i}) > -h_i(a_{-i}) = u_i(a_i, a_{-i})$

a_{-i} が任意だったので、θ_i を表明することが支配戦略になっている。 $\square$

Green - Laffont (1979) *Incentives in Public Decision Making*

逆も言える

social choice function $f(\theta) = (x(\theta), m(\theta))$ で
$x(\theta) = 1 \iff \sum_i \theta_i \geqq C$ であるものが strategy-proof であるならば、各 i について関数 $h_i : \Re^{n-1} \to \Re$ が存在して、支払いが

$$m_i(\theta) = x(\theta)(C - \sum_{j \neq i} \theta_j) + h_i(\theta_{-i}) \qquad \forall \theta \in \Re^n$$

という形のものでなくてはならない。