

2025 年度 ゲーム理論 a 演習第 2 回（自宅学習用）

Takako Fujiwara-Greve

1. 以下のお話を考える。完備完全情報としてよい。

プレイヤーは 2 人で A さんと B さんとする。当初、二人はそれぞれアメを 8 個ずつ持っている。これを 0 時点での (A さんが持っているアメの数、B さんが持っているアメの数) $= (a_0, b_0)$ と書くと、 $(a_0, b_0) = (8, 8)$ ということである。(これらはまだ利得ではないので気をつけること。)

Step 1: A さんが最初に意思決定をし、B さんのアメ 8 個全て奪う (steal 8) か何もしない (not) のどちらかを選ぶ。A さんがもし steal 8 を選ぶと、B さんは 8 個全てを失うが、途中でアメは半減し、A さんは 4 個を得る。A さんが何もしないを選べば、この時点では 2 人ともアメを 8 個ずつ引き続き持っている。つまり、Step 1 後の二人のアメの分布を (A さんが持っているアメの数、B さんが持っているアメの数) $= (a_1, b_1)$ と書くと、A さんが steal 8 をした後は $(a_1, b_1) = (a_0 + 4, b_0 - 8) = (12, 0)$ であり、A さんが not をした後は $(a_1, b_1) = (a_0, b_0) = (8, 8)$ である。

Step 2: A さんの最初の意思決定を見た後で、B さんも A さんのアメを 8 個奪う (steal 8) か何もしない (not) のどちらかを選ぶことができる。B さんが steal 8 を選ぶと A さんのアメは a_1 から 8 個減るが、B さんは 4 個だけをもらえる。B さんが not を選んだ場合、二人のアメの個数は前の Step の終了時と同じである。つまり、Step 2 終了時の二人のアメの分布 (A さんのアメの数、B さんのアメの数) $= (a_2, b_2)$ は、B さんが steal 8 をしたときは $(a_2, b_2) = (a_1 - 8, b_1 + 4)$ であり、B さんが not を選んだときは $(a_2, b_2) = (a_1, b_1)$ である。

Step 1 で A さんが not, Step 2 で B さんが steal 8 を選んだという歴史以外であれば、ここでゲームは終了し、各自の手元のアメの数を利得とする。

Step 3: Step 1 で A さんが not, Step 2 で B さんが steal 8 を選んだときだけ、もう一度 A さんが意思決定できるとする。これを Step 3 とする。このときも A さんは B さんのアメを 8 個奪う (steal 8') か何もしない (not') かのどちらかを選び、ゲームは終了する。A さんが steal 8' を選ぶと、B さんは b_2 から 8 個を失い、A さんは 4 個を得る。A さんが not' を選ぶと、二人のアメの数は Step 2 終了時と同じ数である。

つまり、Step 3 終了時の二人のアメの分布を (A さんの数、B さんの数) $= (a_3, b_3)$ とすると、A さんが steal 8' をしたときは $(a_3, b_3) = (a_2 + 4, b_2 - 8)$ であり、A さんが not' を選んだときは $(a_3, b_3) = (a_2, b_2)$ である。

- (a) このお話を樹形図にきなさい。各情報集合とその持ち主の名前、各行動の名前と終点の利得ベクトルを明記すること。(どうしても PDF には作れなかったらこの部分はあきらめてもよい。)
- (b) これは展開形ゲームである。A さんの純戦略を全て書きなさい。(読み手にわかるように書くこと。)
- (c) B さんの純戦略を全て書きなさい。
- (d) 純戦略による後ろ向きの帰納法の解 (または部分ゲーム完全均衡) はあるか、あれば全て求めなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。(注意: 均衡は戦略の組み合わせで書くこと。)

2. 以下の (双) 行列表現で表される同時ゲーム G を考える。完備情報とする。

P1 \ P2	L	C	R
T	5, 5	0, 0	0, 6
B	0, 0	1, 3	2, 3

- (a) G のナッシュ均衡を混合戦略の範囲で全て求めなさい。
- (b) 完全モニタリングで G を 2 回繰り返すゲームを G^2 と書き、その利得は 2 回の利得を足したものとする。1 回目に (T,L) を行うような、 G^2 の純戦略の組み合わせによる部分ゲーム完全均衡はあるか、あれば1 つ求めなさい。なければどうしてないかを論理的に説明しなさい。
- (c) 完全モニタリングで G を無限回繰り返し、 δ ($0 < \delta < 1$ とする) を割引因子とした割引総利得を利得とした $G^\infty(\delta)$ を考える。
 每期 (T,L) を行うような、 $G^\infty(\delta)$ の純戦略の組み合わせによる部分ゲーム完全均衡が存在する δ の範囲で最も大きいものを求めなさい。
3. 似たような商品を作っている X 社と Y 社がセールを開催するかどうかを同時に決めようとしている。実は X 社にはこの商品のすごい新モデルがあるという噂が流れている。本当のところは X 社しか知らない。そこで、Y 社は X 社に新モデルがある確率を 0.6 としている。このことは X 社も知っていて、共有知識であるとする。この状況を分析するために以下の樹形図を考える。最初に Nature が X 社に新モデルがある (new)、ない (no new)、の状況をそれぞれ確率 0.6 と 0.4 で選び、X 社だけが Nature の選択を知る。その後両企業が同時ゲームを行う。X 社の選択肢は現行モデルの 10% オフセールを行う (Sale) または行わない (Not) の 2 つであり、Y 社は 20% オフ (20)、10% オフ (10)、セールなし (Not) の 3 つの選択肢がある。X 社と Y 社の純戦略の集合をそれぞれ書きなさい。

