

2025 年度 ゲーム理論 a 演習第 1 回解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) 双行列表現は以下である。

A \ B	1	2	3	4	5
1	10, 10	10, 20	15, 25	20, 30	20, 20
2	20, 10	15, 15	20, 20	25, 25	30, 20
3	25, 15	20, 20	15, 15	20, 20	25, 15
4	30, 20	25, 25	20, 20	15, 15	20, 10
5	20, 20	20, 30	15, 25	10, 20	10, 10

- (b) 各プレイヤーにとって、1 は 2 に、5 は 4 に厳密に支配されるのでこれらを消去すると、

A \ B	2	3	4
2	15, 15	20, 20	25, 25
3	20, 20	15, 15	20, 20
4	25, 25	20, 20	15, 15

これ以上は厳密な支配関係はないので、残る「均衡」は $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ の 9 つの戦略の組み合わせをまとめた集合となる。戦略の組み合わせの集合で書くこと。 ($\{2, 3, 4\} \times \{2, 3, 4\}$ という書き方も正しい。)

- (c) 厳密に支配される戦略はナッシュ均衡には入らないので、(b) の表を利用して最適反応をチェックすればよい。

A \ B	2	3	4
2	15, 15	<u>20, 20</u>	<u>25, 25</u>
3	20, <u>20</u>	15, 15	20, <u>20</u>
4	<u>25, 25</u>	<u>20, 20</u>	15, 15

したがって、純戦略の範囲でのナッシュ均衡は 2 つあって、(2, 4) と (4, 2) である。

位置選択ゲームであっても、利得構造によっては同じ場所にならない例となっている。

2. (a) 最適反応に下線をつける。

P1 \ P2	L	C
U	<u>20, 3</u>	0, 0
D	0, 0	<u>1, 3</u>

したがって純戦略の範囲でのナッシュ均衡は 2 つあって (U, L) と (D, C) である。

- (b) プレイヤー 1 の混合戦略は $pU + (1 - p)D$ で表し、プレイヤー 2 の混合戦略は $qL + (1 - q)C$ で表すとする。(読む人にわかるように書けばよい。)

まず、プレイヤー 2 の任意の混合戦略 $qL + (1 - q)C$ に対するプレイヤー 1 の最適反応を求める。

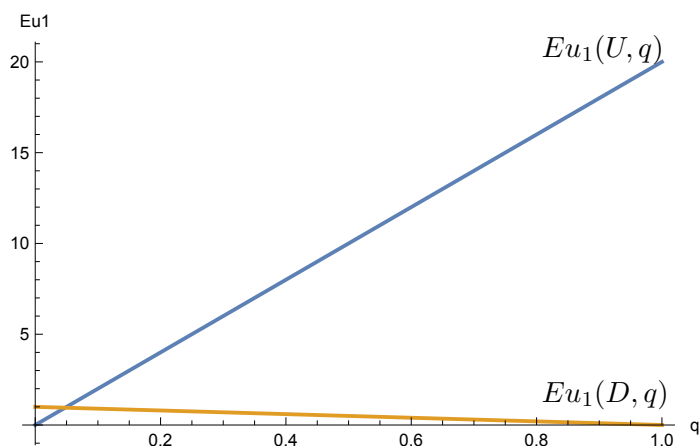
$$Eu_1(U, qL + (1 - q)C) = q \cdot 20 + (1 - q) \cdot 0$$

$$Eu_1(D, qL + (1 - q)C) = q \cdot 0 + (1 - q) \cdot 1$$

であり、混合戦略 $pU + (1 - p)D$ の期待利得はこれらの加重平均（凸結合）

$$Eu_1(pU + (1 - p)D, qL + (1 - q)C) = pEu_1(U, q) + (1 - p)Eu_1(D, q)$$

である。純戦略の期待利得を q の関数としてプロットすると



交点は

$$q \cdot 20 = 1 - q \iff q = \frac{1}{21}$$

のところである。授業でやったように、（上図では省略しているが）混合戦略は $q = \frac{1}{21}$ のとき以外、最適にならない。プレイヤー 1 の最適反応は

$$BR_1(qL + (1 - q)C) = \begin{cases} D & \text{if } q < \frac{1}{21} \\ \Delta(\{U, D\}) & \text{if } q = \frac{1}{21} \\ U & \text{if } q > \frac{1}{21} \end{cases}$$

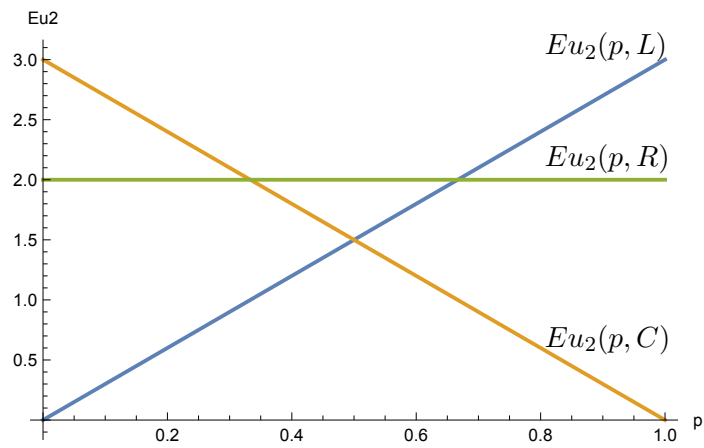
同様にプレイヤー 2 最適反応を求めると

$$BR_2(pU + (1 - p)D) = \begin{cases} C & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ \Delta(\{L, C\}) & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ L & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

となる。したがって、混合戦略の範囲でナッシュ均衡をすべて求めると (D,C)、(U,L) および、 $(\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}D, \frac{1}{21}L + \frac{20}{21}C)$ の 3 つある。

(c) プレイヤー 2 にとって R は L にも C にも厳密に支配されているので、ナッシュ均衡では行われない。したがって、実質的には元のゲームと同じなので、混合戦略の範囲でも同じ 3 つのナッシュ均衡がある。

3. (a) R は厳密には支配されていないが、プレイヤー 1 の純戦略に対しては最適反応になることはないので、問 2(a) と同じで (U,L) と (D,C) のみ。
- (b) プレイヤー 1 の混合戦略を $pU + (1 - p)D$ で表すと、プレイヤー 2 の 3 つの純戦略の期待利得のグラフは実質的に p のみに依存して以下ようになる。



したがって、 $\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{2}{3}$ の範囲であれば、純戦略 R はプレイヤー 2 の最適反応である。

また、プレイヤー 2 が R という純戦略を行っている場合、任意の混合戦略がプレイヤー 1 の最適反応であるから、 $(pU + (1-p)D, R)$ で $\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{2}{3}$ という形の組み合わせはすべてナッシュ均衡である。