2024 年度 ゲームの理論 a 期末試験 解答

Takako Fujiwara-Greve

1. (a) A, B, C。

   (b) $S_A = \{U, D\}$, $S_B = \{L, R\}$, $S_C = \{X, Y\}$。
   （注：集合の記号 $\{,\}$ をちゃんと書けるように。(U, D) は集合とは読めない（むしろベクトル)。今回はこういう人があまりに多かったのでおまけして点を与えた。）

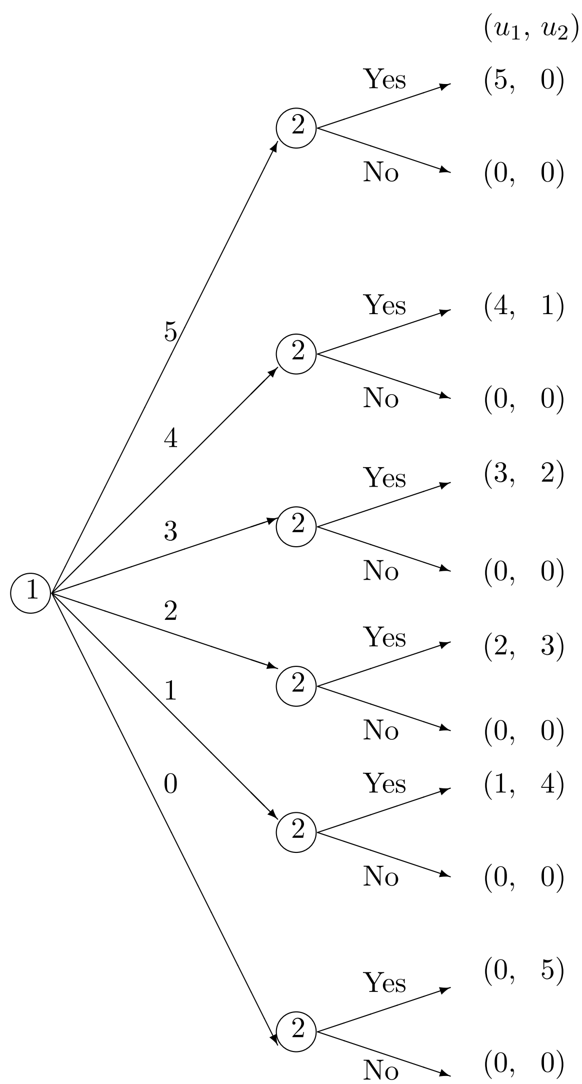
   (c) 解答例：プレイヤー A の他のプレイヤーたちの純戦略の組み合わせ $(s_B, s_C) \in S_B \times S_C$ に対する純戦略の範囲の最適反応とは、プレイヤー A の利得関数を u_A とすると

   $$u_A(s_A, s_B, s_C) \geqq u_A(s'_A, s_B, s_C), \quad \forall s'_A \in S_A$$

   となる $s_A \in S_A$ のことである。
   （注：最適反応の定義を聞いた問題だったが実際に求めている人には、正しければそれなりの点を与えた。）

   (d) (D,R,X) と (U,R,Y) の 2 つある。

2. (a) 図は以下。情報集合が全て 1 点集合になっていることが明らかでなければ得点はない。設問で指定されている「利得ベクトル」とは各終点についているものである。



(b) 証明：

Step 1: プレイヤー１の s_1 が s_2 に対する最適反応であることを示す。

s_1 から得られる利得は $u_1(s_1, s_2) = k \geqq 0$ である。

プレイヤー１の他の混合戦略の期待利得と比較する。このとき、k を確率 0 にするものと正の確率で行うが確率 1 でないものに分ける。（純戦略の範囲で比較するなら前者のみ。）

k を確率 0 で行う任意の混合戦略 σ_1 を考える。このとき確率 1 でプレイヤー２は No を選ぶので、期待利得は $Eu_1(\sigma_1, s_2) = 0$ となる。$u_1(s_1, s_2) = k \geqq 0$ であるから、s_1 の利得以下である。

k を正の確率で行うが確率 1 ではない任意の混合戦略を σ_1' とする。この混合戦略において純戦略 a_1 を行う確率を $\sigma_1'(a_1)$ とすると、確率 $\sigma_1'(k)$ で (k, Yes) となり、利得 k を得る。その他の確率では (a_1, No) となるので利得 0 を得る。したがって期待利得は $Eu_1(\sigma_1', s_2) = \sigma_1'(k)k$ である。$\sigma_1'(k) < 1$ であるから、$k > 0$ のときは $Eu_1(\sigma_1', s_2) = \sigma_1'(k)k < k = u_1(s_1, s_2)$ となり厳密に利得が下がる。$k = 0$ のときは $Eu_1(\sigma_1', s_2) = \sigma_1'(k)k = 0 = k = u_1(s_1, s_2)$ となり、s_1 の利得以下である。

以上より、s_1 は s_2 に対する最適反応（の一つ）である。

Step 2: プレイヤー２の s_2 が s_1 に対する最適反応であることを示す。

$u_2(s_1, s_2) = 5 - k$ である。プレイヤー２が s_2 以外の任意の混合戦略で $a_1 = k$ を見たときに Yes という確率が 1 であるものとそうでないものに分ける。前者を行えば、引き続き利得は $5 - k$ である。後者を行うと $k < 5$ ならば利得は $5 - k$ より厳密に下がり、$k = 5$ のときは利得は同じである。したがって s_2 は s_1 に対する最適反応（の一つ）である。 □

（注：この分析から、最後通牒ゲームであってもナッシュ均衡としては任意の分け方が可能であることがわかる。しかしその多くはゲームの最中の合理性を満たしていないということが (c) の分析でわかる。

- ただ一つの最適反応でなくても均衡として成立する。
- ちなみに誘導標準形を書くのは大変である。なぜならプレイヤー２の純戦略は６つの情報集合それぞれに Yes か No かを決めておく計画なので、($a_1 = 0$ の後、$a_1 = 1$ の後､､､､$a_1 = 5$ の後)=(Yes, No, Yes, No, Yes, Yes) のようなものである。これは 2^6 個ある。だから誘導標準形を書いて考えようと思った人たちはたいてい誘導標準形そのものを誤解していた。）

(c) 最後の意思決定者であるプレイヤー２の、6 つの情報集合における最適な行動を組み合わせた最適な（純）戦略は２つあって、

$$s_2^* = \text{Yes for } \forall a_1, \quad s_2^{**} = \begin{cases} \text{Yes} & \text{if } a_1 < 5 \\ \text{No} & \text{if } a_1 = 5 \end{cases}$$

である。

プレイヤー２が s_2^* を行う場合、プレイヤー１の最適戦略は $s_1^* = 5$ である。このことから、$(s_1^*, s_2^*) = $ (5, Yes for all a_1) は後ろ向き帰納法の解である。

プレイヤー２が s_2^{**} を行う場合、プレイヤー１の純戦略の範囲での最適戦略は $s_1^{**} = 4$ である。このことから、$(s_1^{**}, s_2^{**}) = $ (4, Yes if $a_1 < 5$, No if $a_1 = 5$) も後ろ向き帰納法の解である。

（注：経路だけで (5, Yes) などと書いていたらほとんど点はない。また、このゲームでは後手は均衡において最大で１つだけもらえる。）

(d) アメの総数が増えても、後ろ向き帰納法の解（あるいは部分ゲーム完全均衡）で後手プレイヤーがもらえるアメの数は最大１個である。

3. (a) 採用すると期待利得は $(0.4)10 + (0.5)(-7) = -0.2$ であるから、採用すべきでない。

(b) G タイプが Suit、B タイプが No suit' を選ぶとすると、R は Suit を見ると採用、見ないと採用しないのが最適である。このときは B タイプも Suit' に変えれば採用されて（ここがポイント)、利得が 0 から $5-c$ になる。これは、仮定より $5-c>0$ であるので、利得が上がるということである。したがってこの分離戦略は均衡にならない。

(c) 両タイプが Suit であると、R はスーツを見ても採用しない。そこで、スーツなしの場合を考える。R の信念 r によって採用される場合もあるが、スーツなしで採用されるならば両タイプとも Suit から逸脱するので均衡ではない。スーツなしで採用されない場合も、コストの分利得が上がるので両タイプとも逸脱する。ゆえに両タイプが Suit という一括均衡は存在しない。