2024年度　ゲームの理論 a 演習第 2 回　解答

Takako Fujiwara-Greve

1. Γ は展開形ゲームの囚人のジレンマとして有名な Trust Game である。（利得の大小関係がこうなっているもの。）

   (a) 誘導標準形は以下と本質的に同じならよい。最適反応のところの利得の数値に下線を引いた。

P1 \ P2	Escape	Return
Not Trust	$\underline{1}$, $\underline{0}$	1, $\underline{0}$
Trust	0, $\underline{4}$	$\underline{2}$, 2

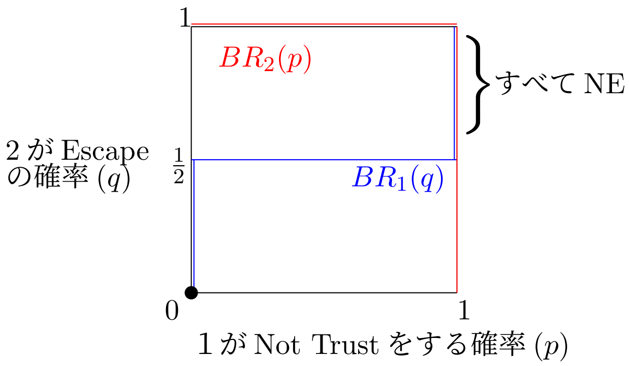
純戦略のナッシュ均衡が存在し、(Not Trust, Escape) である。混合戦略まで考えてみる。プレイヤー 1 の混合戦略を p Not Trust+$(1-p)$Trust として、実数 $p \in [0,1]$ で表し、プレイヤー 2 の混合戦略を q Escape +$(1-q)$Return として、実数 $q \in [0,1]$ で表す。プレイヤー 1 の最適反応は

$$BR_1(q) = \begin{cases} \text{Trust} & \text{if } q < \frac{1}{2}; \\ [0,1] & \text{if } q = \frac{1}{2}; \\ \text{Not Trust} & \text{if } q > \frac{1}{2} \end{cases}$$

であり、プレイヤー 2 の最適反応は

$$BR_2(p) = \begin{cases} \text{Escape} & \text{if } p < 1; \\ [0,1] & \text{if } p = 1 \end{cases}$$

である。（ここでは $[0,1]$ でなくて、任意の混合戦略であることがわかる他の書き方でも良い。）これらを図示すると交点は無限個ある。

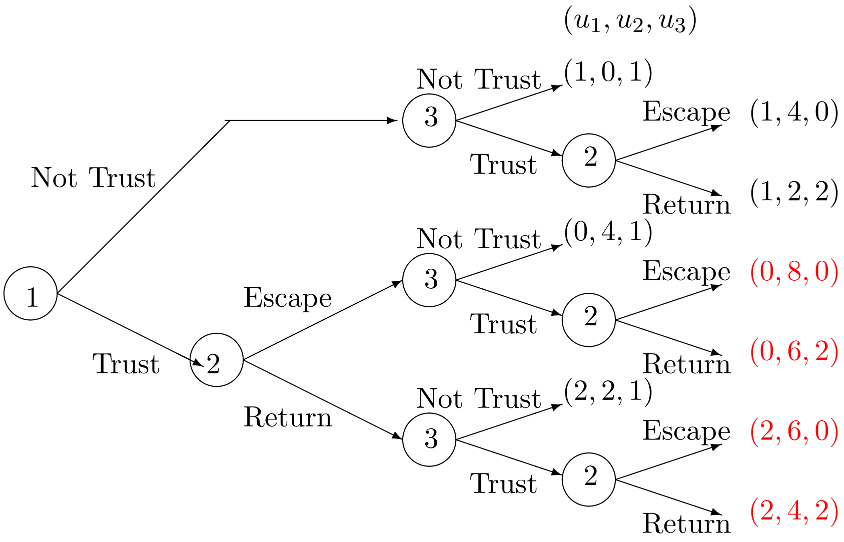


つまり、(Not Trust, q) で $q \in [\frac{1}{2}, 1]$ という形の戦略の組み合わせ全てがナッシュ均衡である。（これには純戦略の均衡も含まれている。）

   (b) 全てのナッシュ均衡においてプレイヤー 1 は Not Trust を確実に行うため利得ベクトルは $(1,0)$ であり、これをパレート支配する $(2,2)$ という利得ベクトルが実現可能であるから、効率的なナッシュ均衡は存在しない。

   (c) 後ろ向きに解いて、(Not Trust, Escape) だけである。
   （その他の混合戦略のナッシュ均衡は不合理ということである。）

   (d) 完成図は以下。（追加した利得ベクトルが赤字になっている。）



後ろ向きに解いて、プレイヤー２の２回目の３つの情報集合では全て Escape が最適。（情報集合は上から順に見るとか決めておく。）

プレイヤー３の３つの情報集合ではこれを踏まえて全て Not Trust が最適。（同上。）まとめると $s_3^* =$(Not Trust, Not Trust, Not Trust) と書ける。

これらを踏まえて、プレイヤー２の１回目の情報集合でも Escape が最適。まとめると $s^*2 =$(Escape, Escape, Escape, Escape) と書ける。（最初の行動が１回目の情報集合、あとは２回目の情報集合で上から。）

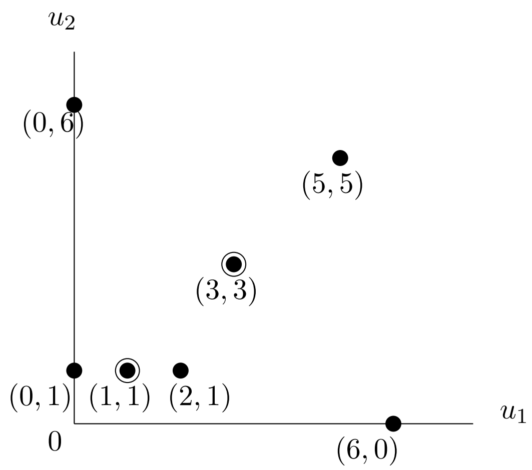
全てを踏まえて、プレイヤー１は１つしか情報集合がないので、$s_1^* =$Not Trust が最適。

まとめると

(Not Trust, (Escape, Escape, Escape, Escape), (Not Trust, Not Trust, Not Trust)) となる。

経路だけ書いて (Not Trust, Not Trust, Escape) などとしたら０点。

2. (a) ナッシュ均衡による利得ベクトルは２重の丸がつけてある。



(b) 第１期目の行動と、第２期目は第１期目の行動の組み合わせ (history) に応じて９通りの条件付き行動を決めるのが戦略。関数で書くと、$H_2 = \{A,B,C\} \times \{a,b,c\}$ が第２期の期初における history の集合、$H_1 = \{\emptyset\}$ を第１期期初の「何もない history」とすると

$$S_1 = \{s_1 \mid s_1 : H_1 \cup H_2 \to \{A,B,C\}\}$$

がプレイヤー１の純戦略の集合、

$$S_2 = \{s_2 \mid s_2 : H_1 \cup H_2 \to \{a, b, c\}\}$$

がプレイヤー２の純戦略の集合。

ベクトルで書くと、(第１期の行動、(A, a) 後の第２期の行動、(A, b) 後、(A, c) 後、(B, a) 後、(B, b) 後、(B, c) 後、(C, a) 後、(C, b) 後、(C, c) 後）の 10 の行動を指定したベクトルで、行動の範囲がプレイヤー１は $\{A, B, C\}$、プレイヤー２は $\{a, b, c\}$ になっていればよい。たとえば、プレイヤー１の純戦略の集合はこの意味では

$$S_1 = \{A, B, C\}^{10}$$

とし、ただし、$s_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ における x_i は上記の順で決められた history 後の条件つ付き行動、と明記すればよい。プレイヤー２の純戦略の集合も座標と history の関係をはっきりさせれば同様に

$$S_2 = \{a, b, c\}^{10}$$

でよい。

(c) ポイントは、

(i) 第２期目はどの history の後でも（どの部分ゲームでも）、G のナッシュ均衡でなければならない、

(ii) 第１期目に (C, c) を行ったら、第２期目は利得の高い G のナッシュ均衡である (B, b) を行い、第１期目に (C, c) でなかったら第２期目は利得の低い (A, a) をするようにアメとムチの構造にする

という２点である。

ただし、第１期目に (C, c) から逸脱するとしたら A か a に行くのが合理的なので、その場合だけ第２期に (A, a) をする、という罰が作られていれば、他の逸脱についてはどちらのナッシュ均衡を使ってもかまわない。

例えば、

$s_1^*(\emptyset) = C$, $s_1^*((C, c)) = B$ かつ $s_1^*(x) = A$ for $x \in H_2 \setminus \{(C, c)\}$

$s_2^*(\emptyset) = c$, $s_2^*((C, c)) = b$ かつ $s_2^*(x) = a$ for $x \in H_2 \setminus \{(C, c)\}$

とすればよい。これが部分ゲーム完全均衡であることを証明する。(他の戦略の組を指定したら、それに合わせて証明を変えること。)

まず、第２期目はどの history の後でも、(B, b) または (A, a) になっているので、ナッシュ均衡である。そこで全体としてナッシュ均衡、すなわち各プレイヤーが相手の戦略を所与として利得の和を最大にしていることを示せばよい。プレイヤー１は s_1^* に従うと（相手は s_2^* に従っているとして)、$5 + 3 = 8$ の総利得を得る。他の戦略としては、第１期目の行動をかえる、第２期目の行動をかえる、両方かえる、などいろいろ考えられる。しかし、第２期目の行動をどこかの部分ゲームで変えても、第１期目の利得はその時点ではすでに確定しており、第２期目の相手の行動を考えると G のナッシュ均衡である s_1^* の行動をするのが利得を最大にする。

ゆえに行動をかえるとしたら第１期目である。もし C でなく A または B をしたらどうなるかを考える。(混合行動に変えるとしても、実現した行動からの利得を考えるので、まず純行動の利得を計算する必要がある。)

A に変えると、１期目は 6 が得られるが２期目は (A, c) 後の部分ゲームに行くので利得は 1 となり、合計は 7 である。これは s_1^* から得られる 8 より少ない。B に変えると、１期目は 2、

２期目は１となり、合計利得はさらに少なくなる。これらを混合したり、C を混合したりしても、8 より大きい総利得を得ることはできないので、s_1^* が s_2^* に対する最適反応であることが言えた。

同様にして、プレイヤー２も s_2^* が s_1^* に対する最適反応である。プレイヤー２は第１期目の行動を a に変えると、合計の利得は $6+1=7$、第１期目を b にすると $1+1=2$、これに対し、s_2^* では $5+3=8$ が得られる。

3. プレイヤー１について：

   プレイヤー２が a をすると $\max_{x\in\{A,B,C\}} u_1(x,a)=1$、

   プレイヤー２が b をすると $\max_{x\in\{A,B,C\}} u_1(x,b)=3$、

   プレイヤー２が c をすると $\max_{x\in\{A,B,C\}} u_1(x,c)=6$ であるから、このうち最小なのは１であり、$\underline{v}_1=1$。

   プレイヤー２について：

   プレイヤー１が A をすると $\max_{y\in\{a,b,c\}} u_2(A,y)=1$、

   プレイヤー１が B をすると $\max_{y\in\{a,b,c\}} u_2(B,y)=3$、

   プレイヤー１が C をすると $\max_{y\in\{a,b,c\}} u_2(C,y)=6$ であるから、このうち最小なのは１であり、$\underline{v}_2=1$ となる。

4. one-step deviation を考えて比較する。(s_1^A, s_2^A) から、$h=(C,c)^t$ あるいは $h=\emptyset$ のときに１期間だけ逸脱すると（どちらのプレイヤーでも）、(C,c) から得られる 5 ではなく、最大で 6 を得て、しかしその後はずっと 1 を得ることになる。したがって、

$$5+\delta\cdot 5+\delta^2\cdot 5 \geqq 6+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 1+\cdots$$

   ならば s_i^A は最適反応である。（その他の部分ゲームにおいてはお互いナッシュ均衡を繰り返しているので最適反応である。）上の不等式は

$$\frac{5}{1-\delta} \geqq 6+\frac{\delta}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{5}$$

   なら成立する。

   (s_1^B, s_2^B) から逸脱する場合、その後はずっと 3 を得るので

$$5+\delta\cdot 5+\delta^2\cdot 5 \geqq 6+\delta\cdot 3+\delta^2\cdot 3+\cdots$$

   ならば s_i^B は最適反応である。この不等式を満たすには

$$\frac{5}{1-\delta} \geqq 6+\frac{3\delta}{1-\delta} \iff \delta \geqq \frac{1}{3}$$

   が必要であるから、 (s_1^A, s_2^A) の組み合わせの方が低い δ で部分ゲーム完全均衡になる。これは、(s_1^A, s_2^A) の方が罰のときの利得が低い（罰が厳しい）からである。